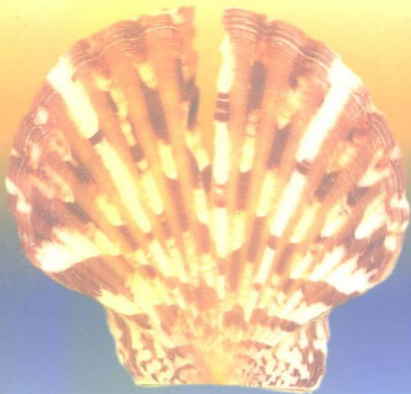


# 板壳断裂力学

## Fracture Mechanics for Plates and Shells

柳春图 蒋持平 著



国防工业出版社

0346.1

L64

455442

# 板壳断裂力学

## Fracture Mechanics for Plates and Shells

柳春图 蒋持平 著



00455442

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

板壳断裂力学/柳春图, 蒋持平著. —北京:国防工业出版社, 2000. 1

ISBN 7-118-02095-8

I. 板… II. ①柳… ②蒋… III. 地壳块断运动-断裂力学 IV. P542

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 06590 号

DW 13/23

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

\*

开本 850×1168 1/32 印张 9 $\frac{7}{8}$  250 千字  
2000 年 1 月第 1 版 2000 年 1 月北京第 1 次印刷  
印数:1—1000 册 定价:19.00 元

---

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

## 致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分,又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展,加强社会主义物质文明和精神文明建设,培养优秀科技人才,确保国防科技优秀图书的出版,国防科工委于1988年初决定每年拨出专款,设立国防科技图书出版基金,成立评审委员会,扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是:

1. 学术水平高,内容有创见,在学科上居领先地位的基础科学理论图书;在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。
2. 学术思想新颖,内容具体、实用,对国防科技发展具有较大推动作用的专著;密切结合科技现代化和国防现代化需要的高新技术内容的专著。
3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值,密切结合科技现代化和国防现代化需要的新工艺、新材料内容的科技图书。
4. 填补目前我国科技领域空白的薄弱学科和边缘学科的科技图书。
5. 特别有价值的科技论文集、译著等。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展工作,负责掌握出版基金的使用方向,评审受理的图书选题,决定资助的图书选题和资助金额,以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书,由国防工业出版社列出出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承

担着记载和弘扬这些成就,积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下,国防科工委率先设立出版基金,扶持出版科技图书,这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物,是对出版工作的一项改革。因而,评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进,这样,才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授,以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来,为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗!

国防科技图书出版基金  
评审委员会

# 国防科技图书出版基金 第三届评审委员会组成人员

名誉主任委员	怀国模			
主任委员	黄宁			
副主任委员	殷鹤龄	高景德	陈芳允	曾铎
秘书长	崔士义			
委员 (以姓氏笔划为序)	于景元	王小谟	尤子平	冯允成
	刘仁	朱森元	朵英贤	宋家树
	杨星豪	吴有生	何庆芝	何国伟
	何新贵	张立同	张汝果	张均武
	张涵信	陈火旺	范学虹	柯有安
	侯正明	莫悟生	崔尔杰	

# 前 言

断裂力学是 20 世纪后半叶固体力学和材料科学领域发展的重要成就。它已经在航空结构、压力容器、机械制造等各重大工程结构的强度设计、安全可靠性分析和缺陷评定的规范与标准中得到广泛应用,大大提高了工业部门的设计与制造水平。

与平面受力状态的结构相比,承受横向载荷的板壳是工程中更为常见的结构形式。然而板壳断裂问题远比平面断裂问题复杂。板壳既存在面内位移,又存在面外位移,其应力应变场沿厚度方向变化。因此板壳问题实质是三维的力学问题,不同的板壳实用理论是对三维问题不同的二维近似。更进一步,已经在工程中广泛应用的 Kirchhoff 经典板壳理论,用于含裂纹板壳却存在严重的理论缺陷。问题的复杂性阻碍了板壳断裂力学的进展,迟滞和限制了它的工程应用。在此之前,关于板壳断裂力学的研究,国内外有关工程手册仅罗列了不同板壳理论对含裂纹板壳的一些简单结果。有关研究仅见诸分散的文献,而且差不多都是按经典理论给出的,作为专门书籍仅有 Sih(1977 年)编辑的《Plates and Shells with Cracks》一本专题论文集。在板壳断裂力学的领域尚没有系统的学术专著。

本书在国内外首次系统地阐述了板壳弯曲断裂理论及其实用分析方法。它是作者从 70 年代末以来在这方面研究成果的总结,是对国内外这一尚属空白领域的弥补。本书的重要特点综合起来主要有:

1. 详细阐明了板壳断裂理论的基础,分析了常用 Kirchhoff 经典板壳理论与 Reissner 型板壳理论之间的区别与联系,论证了 Reissner 型板壳断裂理论的科学性、经典板壳断裂理论的缺陷及

其仍具有一定的实用价值,并通过研究工作讨论了它们的适用范围。

2. 在国际上首先创造性地提出了分析 Reissner 型板壳裂纹尖端场的方法,系统地获得了各类 Reissner 型板壳裂纹尖端的应力应变场,深入揭示了板壳裂纹尖端附近的力学规律。

3. 在对裂纹尖端场严格的理论分析基础上,提出了对板壳断裂分析的局部-整体法。这个方法是计算板壳断裂参数的既严格又极为有效的方法,成功地解决了一系列问题。本书对经典板壳的断裂分析还发展了有特色和简便有效的复变-主部法。书中给出了一批为实际工程所需要的算例,指出了当前国际工程规范中通常采用的鼓胀系数的适用性和缺陷,并给出了简单又精确的改进公式。

4. 开拓性地对表面裂纹尖端附近的力学规律进行了研究,严格给出了表面裂纹尖端附近的应力应变场,并在此基础上应用局部-整体法获得了有理论依据的简单实用的应力强度因子的结果,比国际公认的 Newman 解更为简单、可靠、有效。本书对作者及合作者分析表面裂纹的实验研究也作了简要介绍。

自 70 年代末以来,作者在板壳断裂力学领域先后主持了一系列国家自然科学基金与工业部门的重大课题,其中包括:国家科委“六五”攻关项目“工程结构的断裂力学分析和安全评定”;国家“七五”攻关项目“核压力容器接管区、大开孔区和曲率影响区各种运行工况下应力强度因子和裂纹扩展规律的分析 and 评定”;国家自然科学基金“七五”重大项目二级课题“含裂纹板壳和表面裂纹的研究”,包括海洋、水电、化工、航空等部门的若干大型工程结构断裂分析、安全性评定等,为工程分析所提供的在严格理论基础上的有效分析方法已经广泛用于核结构、压力容器及海洋结构等工业中。有关项目均被鉴定为或由国家基金委重大项目验收组(1992 年)评价为“国际先进水平”。作者曾于 1989 年在四年一次的国际大规模断裂大会 ICF7 上应邀作有关含裂纹板壳的大会特邀报告,上述成果得到国际断裂力学有关权威的好评。作者还多次在其它重要国际和国内学术会议上作有关本书内容的邀请报告,在北京大学和



北京科技大学研究生断裂力学课程中也讲授了有关内容。

本书是围绕作者研究工作主要成果而撰写的一本专著,由于篇幅限制,国内外有关重要著作可能有所遗漏,在此请予以谅解。限于作者的能力与水平,书中难免存在缺点和错误,敬请读者批评指正。

在近 20 年的研究工作中得到了国家自然科学基金委和各工业部门的支持,本书的研究工作主要在中国科学院力学研究所完成,作者在此表示感谢。本书第二章至第五章由蒋持平著写,其余部分由柳春图撰著。

作者 1998 年

# 目 录

第一章 绪论 .....	1
§ 1.1 板壳弯曲断裂问题 .....	1
§ 1.2 Kirchhoff 经典板壳弯曲断裂理论 .....	3
§ 1.3 Reissner 型板壳弯曲断裂理论 .....	7
§ 1.4 Kirchhoff 与 Reissner 型板壳弯曲断裂理论的比较 .....	10
§ 1.5 含裂纹有限尺寸板壳断裂分析的局部-整体法 .....	11
§ 1.6 含表面裂纹板壳 .....	14
第二章 Kirchhoff 板弯曲断裂理论 .....	16
§ 2.1 Kirchhoff 板的基本概念和基本假定 .....	16
§ 2.2 基本公式与弹性曲面微分方程 .....	17
§ 2.3 边界条件 .....	22
§ 2.4 弹性薄板的应变能 .....	26
§ 2.5 极坐标下的挠曲面微分方程与内力公式 .....	26
§ 2.6 裂纹尖端场特征展开式通项公式 .....	29
§ 2.7 Kirchhoff 板弯曲应力强度因子 .....	32
第三章 含裂纹 Kirchhoff 板断裂分析的复变函数方法 .....	34
§ 3.1 基本方程和公式的复变函数表示 .....	34
§ 3.2 所引入函数的确定程度与一般形式 .....	37
§ 3.3 坐标变换与边界条件 .....	41
§ 3.4 运用保角变换方法求解孔口问题 .....	45
§ 3.5 应力强度因子与函数 $\Phi(z)$ 的关系 .....	50
§ 3.6 复变-主部分析法之应用简例 .....	53
§ 3.7 共直线裂纹问题的一般解答 .....	59
§ 3.8 典型弯曲裂纹问题的解答及弯曲应力强度因子公式 .....	64
§ 3.9 共圆曲线裂纹问题的解答及弯曲应力强度因子公式 .....	81
第四章 含裂纹 Kirchhoff 板断裂分析的局部-整体法 .....	90

§ 4.1	裂纹尖端奇异元的位移模式与弯曲应力强度因子 .....	91
§ 4.2	裂纹尖端奇异元的刚度矩阵 .....	92
§ 4.3	裂纹尖端奇异元与常规单元的连接 .....	98
§ 4.4	解析法与数值法的结果比较与讨论 .....	101
§ 4.5	两共线半无限裂纹问题的定解条件及解的实用价值 .....	106
<b>第五章</b>	<b>Reissner 型平板理论及两种平板理论比较 .....</b>	<b>112</b>
§ 5.1	Reissner 型板的基本假定 .....	112
§ 5.2	Reissner 型板的基本公式与平衡微分方程 .....	114
§ 5.3	基本方程的简化 .....	118
§ 5.4	边界条件 .....	121
§ 5.5	极坐标下的基本公式与平衡微分方程 .....	122
§ 5.6	两种平板理论用于无裂纹板时的比较 .....	126
§ 5.7	两种平板理论用于含裂纹板时的比较 .....	133
<b>第六章</b>	<b>由渐近展开法推导 Reissner 型板裂纹尖端场 .....</b>	<b>139</b>
§ 6.1	基本方程和一般求解方法 .....	139
§ 6.2	裂纹尖端场的渐近展开 .....	140
§ 6.3	广义位移和广义内力展开式 .....	145
§ 6.4	几点讨论 .....	149
§ 6.5	应力强度因子与展开式首项系数的关系 .....	150
<b>第七章</b>	<b>Reissner 型板裂纹尖端场展开式的通项公式 .....</b>	<b>152</b>
§ 7.1	标量函数 $F$ 和 $f$ 表示的基本方程和公式 .....	152
§ 7.2	特征展开 .....	154
§ 7.3	函数 $F$ 和 $f$ 的特征展开式 .....	161
§ 7.4	广义位移和内力展开式 .....	163
<b>第八章</b>	<b>含裂纹 Reissner 型板断裂分析的局部-整体法 .....</b>	<b>171</b>
§ 8.1	裂纹尖端奇异元的位移模式 .....	171
§ 8.2	奇异元的刚度矩阵 .....	176
§ 8.3	奇异单元与常规单元的连接 .....	184
§ 8.4	应力强度因子的计算 .....	187
§ 8.5	关于奇异元的形状与应力杂交奇异元 .....	188
<b>第九章</b>	<b>含裂纹 Reissner 型板的典型问题解答及比较 .....</b>	<b>190</b>
§ 9.1	局部-整体法与其它解析和数值法的结果比较 .....	190

§ 9.2	边界对应力强度因子的影响	194
§ 9.3	板的支承条件及长宽比的影响	200
§ 9.4	Reissner 型板理论与 Kirchhoff 板理论所得应力强度因子的比较	202
§ 9.5	计算 Reissner 型板应力强度因子的一组近似方程与近似解法	202
§ 9.6	关于数值计算的几点讨论	209
<b>第十章</b>	<b>含裂纹 Reissner 型球壳的断裂分析</b>	<b>211</b>
§ 10.1	壳体断裂问题概述	211
§ 10.2	Reissner 型球壳的基本方程	213
§ 10.3	Reissner 型球壳裂纹尖端场与应力强度因子	218
§ 10.4	含裂纹 Reissner 型球壳断裂分析的局部-整体法	224
§ 10.5	鼓胀系数	232
§ 10.6	几点结论	234
<b>第十一章</b>	<b>含裂纹 Reissner 型圆柱壳的断裂分析</b>	<b>236</b>
§ 11.1	含轴向裂纹 Reissner 型圆柱壳的基本方程与摄动解	236
§ 11.2	含轴向裂纹 Reissner 型圆柱壳的断裂分析	241
§ 11.3	环向裂纹问题	246
§ 11.4	任意位向裂纹与孔边裂纹问题	248
<b>第十二章</b>	<b>含表面裂纹板壳</b>	<b>251</b>
§ 12.1	基本方程的曲线坐标变换	251
§ 12.2	基本方程的特征函数展开	256
§ 12.3	半椭圆表面裂纹前缘应力应变场	265
§ 12.4	含表面裂纹板的局部-整体分析	268
§ 12.5	表面裂纹的光弹实验	281
<b>参考文献</b>		<b>290</b>

# Contents

Chapter 1	Introduction .....	1
§ 1.1	Problems of plate and shell bending fracture .....	1
§ 1.2	Kirchhoff classical fracture theory for plates and shells .....	3
§ 1.3	Reissner fracture theory for plates and shells .....	7
§ 1.4	A comparison between Kirchhoff and Reissner fracture theories .....	10
§ 1.5	Local-global analysis of finite-size plates and shells with cracks .....	11
§ 1.6	Plates and shells with surface cracks .....	14
Chapter 2	Kirchhoff classical fracture theory for plates with cracks .....	16
§ 2.1	basic concepts and assumptions in the Kirchhoff theory for plates .....	16
§ 2.2	Basic formulation and differential equation for the elastic curved surface .....	17
§ 2.3	Boundary conditions .....	22
§ 2.4	Strain energy of Kirchhoff plates .....	26
§ 2.5	Basic equations and formulation in the polar coordinate system .....	26
§ 2.6	General expressions of the eigenfunction expansions for crack tip fields .....	29
§ 2.7	Bending stress intensity factors for Kirchhoff plates with cracks .....	32
Chapter 3	Complex variable method in fracture analysis of Kirchhoff plates with cracks .....	34

§ 3.1	Complex representation of the basic equations and formulation .....	34
§ 3.2	The general form of the complex functions .....	37
§ 3.3	Coordinate transformation and boundary conditions .....	41
§ 3.4	Solving curvilinear hole problems by the conformal mapping technique .....	45
§ 3.5	Relations between the bending stress intensity factors and the function $\Phi(z)$ .....	50
§ 3.6	Examples of the complex variable-principal part method .....	53
§ 3.7	General solutions of collinear crack problems .....	59
§ 3.8	Solutions of typical problems of plates with cracks and bending stress intensity factors .....	64
§ 3.9	Solutions for plates with co-circular curvilinear cracks and the related bending stress intensity factors .....	81
Chapter 4	Local-global analysis for Kirchhoff plates with cracks .....	90
§ 4.1	Displacement model of a special bending crack tip finite element and bending stress intensity factors .....	91
§ 4.2	Stiffness matrix of the special crack tip finite element .....	92
§ 4.3	Coupling between the special element and the adjoining conventional elements .....	98
§ 4.4	Comparison and discussion on the results of the analytical method and the numerical method .....	101
§ 4.5	Solutions for collinear semi-infinite crack problems and their applications .....	106
Chapter 5	Reissner theory for plates and a comparison with Kirchhoff classical theory .....	112
§ 5.1	Basic assumptions in the Reissner theory for plates .....	112
§ 5.2	Basic formulation and differential equations of equilibrium in the Reissner theory for plates .....	114
§ 5.3	Simplification of basic equations .....	118

§ 5. 4	Boundary conditions .....	121
§ 5. 5	Basic formulation and differential equations of equilibrium in the polar coordinate system .....	122
§ 5. 6	A comparison between the two theories for plates without cracks .....	126
§ 5. 7	A comparison between the two theories for plates with cracks .....	133
Chapter 6	Asymptotic expansion of the crack tip fields for Reissner plates .....	139
§ 6. 1	Basic formulation and analytical method .....	139
§ 6. 2	Asymptotic expansions of the crack tip fields .....	140
§ 6. 3	Asymptotic expansions of the generalized displacement and stress resultant intensity functions .....	145
§ 6. 4	Discussions .....	149
§ 6. 5	Relations between the stress intensity factors and the coefficients of the first terms of the expansions .....	150
Chapter 7	General expressions of the expansions for the Reissner plate crack tip fields .....	152
§ 7. 1	Basic equations and formulation expressed by the scalar functions $F$ and $f$ .....	152
§ 7. 2	Eigenfunction expansions .....	154
§ 7. 3	Eigenfunction expansions of the functions $F$ and $f$ .....	161
§ 7. 4	Expansions of the generalized displacement and stress resultant intensity functions .....	163
Chapter 8	Local-global analysis for the Reissner plates with cracks .....	171
§ 8. 1	Displacement model of a special crack tip finite element for Reissner plates .....	171
§ 8. 2	Stiffness matrix of the special crack tip finite element .....	176
§ 8. 3	Coupling between the special element and the adjoining conventional elements .....	184
§ 8. 4	Stress intensity factors .....	187

§ 8.5	The shape of the special element and special mixed elements .....	188
Chapter 9	Solution and comparison of typical problems for Reissner plates with cracks .....	190
§ 9.1	A comparison between the results of the local-global method and other analytical and numerical methods .....	190
§ 9.2	Influence of boundaries on stress intensity factors .....	194
§ 9.3	Influence of boundary conditions and aspect ratio on stress intensity factors .....	200
§ 9.4	A comparison between the results of stress intensity factors for Kirchhoff and Reissner theories .....	202
§ 9.5	A Set of approximate equations and an approximate method .....	202
§ 9.6	Discussions on numerical method .....	209
Chapter 10	Reissner spherical shells with cracks .....	211
§ 10.1	Problems of shell fracture .....	211
§ 10.2	Basic equations in the Reissner theory of spherical shells .....	213
§ 10.3	Crack tip fields and stress intensity factors for the Reissner spherical shells .....	218
§ 10.4	Local-global analysis for Reissner shells with cracks .....	224
§ 10.5	Bulging factors .....	232
§ 10.6	Conclusions .....	234
Chapter 11	Reissner cylindrical shells with cracks .....	236
§ 11.1	Basic equations and a perturbation solution for Reissner cylindrical shells with axial cracks .....	236
§ 11.2	Fracture analysis for Reissner cylindrical shells with axial cracks .....	241
§ 11.3	Cylindrical shells with circumferential cracks .....	246
§ 11.4	Cylindrical shells with cracks originating from a hole .....	248
Chapter 12	Plates and shells with surface cracks .....	251



§ 12.1	Basic equations in curvilinear coordinates .....	251
§ 12.2	Eigenfunction expansion of the basic equations .....	256
§ 12.3	Stress-strain fields at the tip of semi-elliptical surface crack .....	265
§ 12.4	Local-global analysis for plates with surface cracks .....	268
§ 12.5	Photoelastic experiments for surface cracks .....	281
参考文献 .....		290

# 第一章 绪 论

## § 1.1 板壳弯曲断裂问题

从 Irwin<sup>[1]</sup>开始,或者更早地还可以追溯到 Griffith<sup>[2]</sup>所发展起来的断裂力学是 20 世纪后半叶固体力学领域的重要成就。它已经在压力容器、航空结构、机械制造等各重大工程结构的强度设计、安全可靠性分析和缺陷评定的规范与标准中得到广泛应用,大大提高了工业部门的设计与制造水平,提高了控制灾难性事故的能力。

在这门学科中,平面断裂力学是最为成熟的部分。它的原理和分析方法都已系统而完整地建立,对各类平面裂纹问题的分析结果也较为详尽地载入了应力强度因子手册<sup>[3~7]</sup>。然而对于板壳弯曲断裂问题,情形不完全是这样。迄今为止,国际国内都还没有完整系统阐述板壳弯曲断裂理论及其分析方法的专著。

板壳弯曲断裂问题具有重要的实用价值。与平面受力状态的结构相比,承受横向载荷的板壳是工程中更为常见的结构形式,特别在航空、化工部门更是重要的承载结构。为了保证其安全使用、避免低应力脆断和疲劳破坏、以及安全设计、合理选材等目的,必须深入了解含裂纹板壳的真正受力状态。

在另一方面,板壳弯曲断裂问题远比平面断裂问题复杂<sup>[8,9]</sup>。板壳除了有面内位移外,还存在面外位移。平面问题中应力和位移与厚度方向无关,而板壳内的应力应变场沿厚度方向变化。因此板壳问题实质是三维的力学问题,不同的板壳实用理论是对三维问题的不同二维近似。对于无裂纹板壳结构,已经建立了满足工程分析需要的实用有效的板壳理论,其中应用最广泛的是 Kirchhoff

经典板理论与考虑了横向剪切变形的 Reissner 型板壳理论。为了使这些实用板壳理论能有效地用于分析含裂纹板壳结构,需要对它们进行深入的理论与分析方法方面的研究。

我们知道,平板的自由边界条件应该有三个,即法向弯矩、扭矩和横向剪力的边界条件。但是经典薄板理论的基本微分方程为四阶,只要求两个边界条件。Kirchhoff 首先引入等效剪力的概念,将扭矩和横向剪力两个独立的边界条件合并为一个。根据 St. Venant 原理(亦为更精确的理论分析、试验和大量的工程实践所证实),这样作仅仅显著地改变了自由边界附近很小区域的局部应力,因而经典薄板理论具有足够的工程精度。但是板的裂纹面就是自由边界,弯曲裂纹尖端是两个自由边界相交的特殊角点。这就引起了经典薄板弯曲断裂理论的严重理论缺陷。Reissner 型板壳理论能够满足它的自由边界的三个边界条件,因而有较高的分析精度。然而由于其微分方程阶次较高,曾有较长的一段时间,对其裂纹尖端场的理论研究进展缓慢,影响了对它的分析方法的研究。

总体上说,由于工程中对板壳弯曲断裂问题研究的广泛需要,国际上已经在经典薄板弯曲断裂理论、Reissner 型板壳弯曲断裂理论以及含裂纹板壳的三维断裂分析方面作了大量的研究工作,但是有关文献显得分散和零乱。例如国际上通用的几本应力强度因子手册中,有的手册<sup>[3~5]</sup>没有板壳断裂分析的内容,有的手册<sup>[6]</sup>则是平行地罗列了一些含裂纹经典板壳与含裂纹 Reissner 型板壳的分析结果。人们不容易从繁多散乱的文献中,找到不同板壳断裂理论之间的差别与联系,确定不同理论和方法所得结果的适用范围。从科研和工程的角度,都非常需要一本系统阐述板壳断裂问题的专著。

本书总结了柳春图和他的学生们十余年的研究成果,试图较系统地阐述 Kirchhoff 经典板壳与 Reissner 型板壳的弯曲断裂理论以及二者的差别与联系;介绍建立在这两个理论基础上的解析和数值方法及典型问题的计算结果,特别是介绍对各类有限尺寸

含裂纹板壳(包括作为三维问题的含表面裂纹板壳)实用有效的局部-整体分析法。作者希望本书能成为一本较系统的板壳断裂分析专著,以填补目前在这一断裂研究领域的空白。

## § 1.2 Kirchhoff 经典板壳弯曲断裂理论

经典板壳理论或者说 Kirchhoff 板壳理论是工程中最常用的板壳理论<sup>[10]</sup>。早期的板壳断裂研究大部分采用 Kirchhoff 板壳理论。像前节已经指出的,这样的研究存在较为严重的理论缺陷。另一方面,Kirchhoff 板壳理论在工程上应用非常广泛,在这个理论基础上建立的对断裂问题的分析方法从计算方法的角度讲较为成熟和简单。如果弄清了 Kirchhoff 板壳理论分析断裂问题时的缺陷所在,了解了由它所得的结果与更精确的板壳断裂理论结果之间的差异与联系,了解了它的适用范围,使科研和工程人员能够心中有数地应用它,则经典板壳理论在含裂纹板壳的研究中仍具有实用价值。下面从 Kirchhoff 平板弯曲断裂理论开始评述。

### 1. 基本方程

Kirchhoff 平板理论对板的弯曲变形作了如下假设:在变形前垂直于中面的直线,在变形后没有伸缩,并且继续垂直于变形后的中面。这个假设使得可以用一个广义位移,即板的中面挠度  $w(x,y)$  来表示三个位移分量,进而推出熟知的薄板弹性曲面微分方程

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q \quad (1.1)$$

式中  $D$  为板的抗弯刚度,  $q$  为作用于板面的横向载荷。平板典型的边界条件有三种:固支、简支和自由边。它们分别可以表示为

$$\text{固支边:} \quad w = \bar{w} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \bar{\psi}_n \quad (1.2)$$

$$\text{简支边:} \quad w = \bar{w} \quad M_n = \bar{M}_n \quad (1.3)$$

$$\text{自由边: } M_n = \bar{M}_n \quad M_{ns} = \bar{M}_{ns} \quad Q_n = \bar{Q}_n \quad (1.4)$$

其中  $M_n, M_{ns}$  和  $Q_n$  分别为板的弯矩、扭矩和横向剪力, 下标  $n$  和  $s$  分别表示板边界的法向和切向, 上方带横线的量表示边界已知量。由于基本方程(1.1)为四阶, 只要求两个边界条件, 故引入等效剪力的概念

$$V_n = \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + Q_n \quad (1.5)$$

将自由边的边界条件减为两个

$$\text{自由边: } M_n = \bar{M}_n \quad V_n = \bar{V}_n \quad (1.6)$$

利用能量原理可以说明这样的引进是合理的。设自由边界  $C$  上挠度  $w$  有一变分  $\delta w$ , 则外力功的变分  $\delta A$  为

$$\begin{aligned} \delta A = & \int_C \left( -M_{ns} \frac{\partial \delta w}{\partial s} + Q_n \delta w \right) ds = \\ & - [M_{ns} \delta w]_A^B + \int_C \left( \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + Q_n \right) \delta w ds \end{aligned} \quad (1.7)$$

上式右边第一项为零,  $\partial M_{ns} / \partial s + Q_n$  是与广义变分  $\delta w$  相应的广义力, 与式(1.5)定义的等效剪力一致。

等效剪力概念的提出克服了 Kirchhoff 板壳理论在数学上求解的困难, 促进了这个理论的工程应用。然而由于它显著地改变了自由边邻近的受力状态, 当用它来研究裂纹问题时, 就暴露了它固有的理论缺陷。

## 2. 裂纹尖端场与应力强度因子

1961年, Williams<sup>[11]</sup>首次将 Kirchhoff 平板裂纹尖端位移场进行特征展开, 给出了位移、应变和应力场的前两阶展开式。以裂纹尖端为中心建立极坐标  $(r, \theta)$ , 见图1.1, 则板的挠度  $w$ 、板面内径向正应力  $\sigma_r$ 、环向正应力  $\sigma_\theta$  和剪应力  $\tau_{r\theta}$  的展开式为

$$\begin{aligned} w = & r^{\frac{3}{2}} \left\{ \left[ -\cos \frac{3}{2}\theta + \frac{3(1-\nu)}{7+\nu} \cos \frac{\theta}{2} \right] a_1 + \right. \\ & \left. \left[ \sin \frac{3}{2}\theta - \frac{3(1-\nu)}{5+3\nu} \sin \frac{\theta}{2} \right] b_1 \right\} + \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

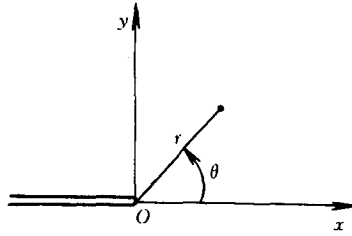


图1.1 裂纹尖端极坐标

$$\sigma_r = \frac{3Gz}{2\sqrt{r}} \left\{ \left[ \cos \frac{3}{2}\theta - \frac{3+5\nu}{7+\nu} \cos \frac{\theta}{2} \right] a_1 + \left[ -\sin \frac{3}{2}\theta + \frac{3+5\nu}{5+3\nu} \sin \frac{\theta}{2} \right] b_1 \right\} + \dots \quad (1.9)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3Gz}{2\sqrt{r}} \left\{ \left[ -\cos \frac{3}{2}\theta - \frac{5+3\nu}{7+\nu} \cos \frac{\theta}{2} \right] a_1 + \left[ \sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2} \right] b_1 \right\} + \dots \quad (1.10)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{3Gz}{2\sqrt{r}} \left\{ \left[ -\sin \frac{3}{2}\theta + \frac{1-\nu}{7+\nu} \sin \frac{\theta}{2} \right] a_1 + \left[ -\cos \frac{3}{2}\theta + \frac{1-\nu}{5+3\nu} \cos \frac{\theta}{2} \right] b_1 \right\} + \dots \quad (1.11)$$

其中  $G$  为剪切弹性模量,  $\nu$  为泊松比,  $z$  为从板中面出发沿厚度方向的坐标,  $a_1$  和  $b_1$  为待定常数。

从式(1.9)~(1.11)可以看出,弯曲板的三个主要应力在板面数值达到最大,与平面断裂问题一样,奇异性也为  $r^{-1/2}$  阶。为了表征受弯板在裂纹尖端附近应力场的强弱, Sih 和 Paris<sup>[12]</sup> 比照平面裂纹问题定义了所谓板弯曲应力强度因子  $K_1$  (拉伸型) 和  $K_2$  (面内剪切型)。  $K_1$  和  $K_2$  与 Williams 展开式(1.10)和(1.11)的首项系数  $a_1$  和  $b_1$  之间存在简单关系

$$K_1 = -\frac{3\sqrt{2\pi}(3+\nu)Gha_1}{7+\nu} \quad (1.12)$$

$$K_2 = - \frac{3 \sqrt{2\pi}(3 + \nu)Ghb_1}{5 + \nu} \quad (1.13)$$

其中  $h$  为板厚。

### 3. 复变函数解法

对含裂纹 Kirchhoff 平板,已经有了较为成熟的解析分析方法,主要有复变函数、积分变换等方法。复变函数方法对于二维孔口和裂纹问题,具有较大的优越性。仿照 Мухоморовичи<sup>[13]</sup>处理弹性力学的平面问题的方式,可以将板的弯曲内力用两个解析函数  $\Phi(z)$  和  $\Psi(z)$  表示<sup>[14]</sup>

$$M_x + M_y = -4D(1 + \nu)\text{Re}\Phi(z) \quad (1.14)$$

$$M_y - M_x + 2iM_{xy} = 2D(1 - \nu)[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \quad (1.15)$$

$$Q_x - iQ_y = -4D\Phi'(z) \quad (1.16)$$

其中  $\text{Re}$  表示取函数的实部,  $z = x + iy$  为复变量,当不至于与空间直角坐标系的  $z$  坐标混淆。

Sih 和 Paris<sup>[12]</sup>首先利用复变函数方法研究了若干经典板壳弯曲断裂问题,并定义了复应力强度因子  $K$

$$K = K_1 - iK_2 \quad (1.17)$$

建立了  $K$  与复应力函数  $\Phi(z)$  之间的简单关系

$$K = - \frac{12 \sqrt{2\pi}D(3 + \nu)}{h^2} \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)^{\frac{1}{2}} \Phi(z) \quad (1.18)$$

其中  $z_1$  为裂纹尖端坐标。

本书将蒋持平等<sup>[15~19]</sup>在平面断裂问题研究中所采用的复变-主部分析法推广于研究板弯曲断裂问题,非常简单有效,并获得了一些有意义的新结果<sup>[20,21]</sup>。理论方面,则阐明了不同裂纹间函数  $\Phi(z)$  的虚常数  $iC$  跳跃的物理意义等重要问题。

### 4. 关于 Kirchhoff 板弯曲断裂理论的缺陷

前面已经指出,对自由边所采用的 Kirchhoff 边界条件,引起

了 Kirchhoff 板弯曲断裂理论的缺陷。这种缺陷主要可归纳为以下两点：

①虽然主要应力  $\sigma_r, \sigma_\theta$  和  $\tau_{r\theta}$  关于  $r$  的奇异性阶次为  $r^{-1/2}$  阶，与平面问题相应量的阶次相同，但是角分布函数(关于  $\theta$ )不同，难以研究拉伸与弯曲的耦合问题。

②横向剪应力(板的面外剪应力)  $\tau_{rz}$  和  $\tau_{\theta z}$  的阶次为  $r^{-3/2}$  阶，与更精确的三维分析结果不符，也违背了裂纹尖端附近应变能(之和)应当有限的原则。这种情况使得我们无法研究经典板的 III 型(面外剪切)应力强度因子。

由于以上两点严重的理论缺陷，人们自然需要了解 Kirchhoff 板壳弯曲断裂理论是否仍然有效的问题。在研究过较为精确的 Reissner 型板壳弯曲断裂理论，并将这两个板壳断裂理论进行比较之后，可以看到，Kirchhoff 板壳断裂理论仍然有一定的实用价值。

### § 1.3 Reissner 型板壳弯曲断裂理论

Reissner 型板壳理论<sup>[22]</sup>在某种平均意义上计及了板壳的横向剪切变形，能够满足作为自由边界的裂纹面边界条件。对于含裂纹板壳，Reissner 型板壳理论克服了 Kirchhoff 板壳理论带来的固有理论缺陷，能够较真实地描写裂纹尖端应力场的力学性质。

用 Reissner 型板壳理论研究板壳断裂问题可以说是板壳断裂研究中的一个重要进展。柳春图和他的学生们在这个领域进行了长期的研究工作，在其理论基础与实用分析方法方面均取得了重要的和系统的成果。

下面仍通过平板断裂问题来评述这个理论。

#### 1. 基本方程

Reissner 型平板理论放松了 Kirchhoff 板关于变形前垂直于中面的直线在变形后仍垂直于中面的假设，导致了可以用三个广义位移分量来表示三个位移分量，将三维问题化为二维问题



$$u(x, y, z) = -z\psi_r(x, y) \quad (1.19)$$

$$v(x, y, z) = -z\psi_y(x, y) \quad (1.20)$$

$$w(x, y, z) = \tau w(x, y) \quad (1.21)$$

其中  $\psi_r$  和  $\psi_y$  是变形前垂直于中面的直线在变形后的转角,  $w$  是中面挠度。由此, 可以导出以三个广义位移表示的平衡微分方程

$$D\left(\frac{\partial^2\psi_r}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_r\right) = 0 \quad (1.22)$$

$$D\left(\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial x\partial y} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}\right) + C\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y\right) = 0 \quad (1.23)$$

$$C\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_r}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right) + q = 0 \quad (1.24)$$

其中  $C$  为横向抗剪刚度。若  $C \rightarrow \infty$ , 则  $\psi_r \rightarrow \partial w / \partial x$ ,  $\psi_y \rightarrow \partial w / \partial y$ , 三个广义位移退化为一个广义位移, 方程组 (1.22)~(1.24) 退化为经典板的平衡微分方程 (1.1)。

方程组 (1.22)~(1.24) 相当于一个六阶微分方程, 每条边界要求三个边界条件, 可以完全满足自由边的边界条件 (1.4), 使裂纹尖端应力场得到较为精确的描述。

## 2. 裂纹尖端场与应力强度因子

根据 Reissner 型板理论研究平板弯曲断裂问题是较为复杂的。早期的研究通常采用积分变换方法, 将断裂力学问题化为对偶积分方程。有代表性的工作是 1960 年 Knowles 和 Wang<sup>[23]</sup> 对远处受均匀弯矩的含裂纹无限板的分析。他们首先指出, 采用 Reissner 型板理论进行断裂分析, 裂纹尖端的应力  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{rz}$  和  $\tau_{\theta z}$  的奇异性均为  $r^{-1/2}$  阶, 应力场的角分布规律也分别与平面问题和反平面问题的角分布规律相同。随后, Hartranft 和 Sih<sup>[24]</sup> 用同样的方法研究了上述问题, 所不同的是放松了板厚趋于零的假设, 考虑了板的厚度效应。

应当指出,这些早期的研究是针对含裂纹无限板的,也仅仅给出了裂纹尖端应力场级数展开式的首项,对整个应力场的情况仍不清楚。由于问题的复杂性,研究一度没有进展。1981年, Murthy 等人<sup>[25]</sup>发表了对称 I 型情况下 Reissner 型板裂纹尖端位移场展开式的通项公式。与上述工作同时,1980年,柳春图<sup>[26,27]</sup>给出了其 I 型、II 型和 III 型渐近展开式的一般求解方法,并给出了前几项的具体表达式。以后又获得了其任意阶展开式的通项公式,并把它推广于 Reissner 型圆柱壳和球壳的裂纹尖端场研究,完成了对 Reissner 型板壳裂纹尖端场的系统性研究,为板壳的断裂分析奠定了坚实的力学基础。

根据 Reissner 型平板理论,裂纹尖端广义位移展开式为

$$\psi_r = r^{\frac{1}{2}} \left[ A_1^{(\frac{1}{2})} \left( \cos \frac{3}{2}\theta + \frac{3\nu - 5}{1 + \nu} \cos \frac{\theta}{2} \right) + A_2^{(\frac{1}{2})} \left( \sin \frac{3}{2}\theta + \frac{3\nu - 5}{3(1 + \nu)} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] + \dots \quad (1.25)$$

$$\psi_\theta = r^{\frac{1}{2}} \left[ A_1^{(\frac{1}{2})} \left( -\sin \frac{3}{2}\theta + \frac{7 - \nu}{1 + \nu} \sin \frac{\theta}{2} \right) + A_2^{(\frac{1}{2})} \left( \cos \frac{3}{2}\theta - \frac{7 - \nu}{3(1 + \nu)} \cos \frac{\theta}{2} \right) \right] + \dots \quad (1.26)$$

$$w = r^{\frac{1}{2}} D_2^{(\frac{1}{2})} \sin \frac{\theta}{2} + \dots \quad (1.27)$$

其中  $A_1^{(\frac{1}{2})}$ 、 $A_2^{(\frac{1}{2})}$  和  $D_2^{(\frac{1}{2})}$  是待定常数。

利用这些展开式,可以求得裂纹尖端各应力分量的展开式,并且定义 I、II、III 型应力强度因子(应力强度因子沿板的厚度坐标  $z$  变化)

$$K_1(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_\theta(r, 0) \quad (1.28)$$

$$K_2(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{r\theta}(r, 0) \quad (1.29)$$

$$K_3(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{\theta z}(r, 0) \quad (1.30)$$

将裂纹尖端对应应力分量展开式分别代入式(1.28)~(1.30),可以求得应力强度因子与位移或应力展开式系数之间的关系(注意到,不同文献中应力强度因子的定义可能相差常数乘子 $\sqrt{\pi}$ ):

$$K_1(z) = 4 \sqrt{2\pi G z} A_1^{(\frac{1}{2})} \quad (1.31)$$

$$K_2(z) = -\frac{4}{3} \sqrt{2\pi G z} A_2^{(\frac{1}{2})} \quad (1.32)$$

$$K_3(z) = \frac{5}{8} \sqrt{2\pi G} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) D_2^{(\frac{1}{2})} \quad (1.33)$$

可以看出, I 型和 II 型应力强度因子的最大值发生在板表面,即  $z = h/2$  处, III 型应力强度因子的最大值发生在板中面,即  $z=0$  处。

### 3. 其它较精确的板弯曲断裂理论

除了 Reissner 型平板理论外,还有其它一些较精确的平板弯曲断裂理论,例如 Goldenweizer 理论及 H-S 理论<sup>[28]</sup>,这些理论不再假设应力沿板的厚度线性分布,而是采用了更精确当然也是更复杂的表达式。但是这些改进后的理论精度提高的程度及其适用范围目前还不很清楚。因为数学上的复杂性,没有见到对这些理论的进一步的研究和讨论。

## § 1.4 Kirchhoff 与 Reissner 型板壳 弯曲断裂理论的比较

对于较薄的板,只要不是自由边的邻域,由 Kirchhoff 与 Reissner 型两种理论所得的结果没有多大差别,但是作为两自由边特殊角点的裂纹尖端附近区域是一个例外。在板的六个应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$  中,一般说来,  $\sigma_x, \sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  较大,  $\tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  约小一个量级,  $\sigma_z$  又再小一个量级。在裂纹尖端,由 Kirchhoff 板理论求得的  $\tau_{yz}$  和  $\tau_{xz}$  的奇异性为  $r^{-3/2}$  阶,不合理,但三个较大的应力  $\sigma_x, \sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  仍具有  $r^{-1/2}$  阶的合理的奇异性,不过即使板厚  $h$  与裂

纹半长  $a$  的比值趋于零, 它们也不趋于 Reissner 型板理论的结果。对于远处承受均匀弯矩的板, 图1.2中列出了由 Reissner 型板与 Kirchhoff 板理论求得的 I 型应力强度因子的比值  $\Phi(1)$ <sup>[24]</sup> 随

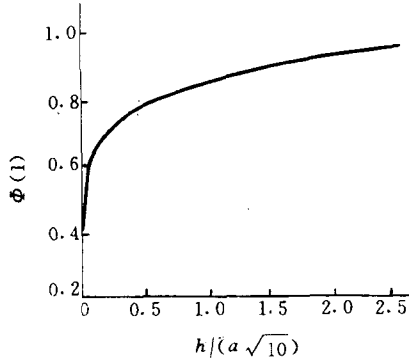


图1.2 应力强度因子比值  $\Phi(1)$  随板厚变化

板厚的变化。从这个典型例子可以看到, 当板厚趋于零时,  $\Phi(1) \rightarrow (1+\nu)/(3+\nu)$ 。据此有的工程界推荐采用  $(1+\nu)/(3+\nu)$  乘以经典板的结果作为 Reissner 型板的结果。但由于在  $h=0$  处, 曲线的斜率无限大, 当板厚从零增加到一个很小的有限值时,  $\Phi(1)$  的数值急剧增大, 因而这种简单作法是不能令人放心的。在另一方面, Kirchhoff 板理论在工程中应用广泛, 分析也更方便, 如果我们了解了对典型问题由两种理论所求得的应力强度因子之间的关系, 仍然能够在工程分析中心中有数地采用 Kirchhoff 板弯曲断裂理论的结果。当然对于较精确的分析, 最好还是采用 Reissner 型板弯曲断裂理论。

### § 1.5 含裂纹有限尺寸板壳断裂 分析的局部-整体法

工程中使用的都是有限尺寸板。对含裂纹有限尺寸板的断裂参量计算, 一般难以获得严格的解析解, 由于裂纹尖端应力的奇异

性,采用纯数值法也会遇到较大的困难。在板壳裂纹尖端场严格理论分析基础上所发展的局部-整体法,是含裂纹板壳分析方法研究的重要进展,较好地解决了有限尺寸板壳的断裂分析问题。

### 1. 有限尺寸板壳断裂参量计算的简短历史回顾

一般说来,无裂纹有限尺寸板壳的分析方法已经较为成熟<sup>[29~33]</sup>,然而对于含裂纹有限尺寸板壳,即使采用有限元这样强有力的数值方法,也有较大的困难。这主要由于常规有限单元难以反映在裂纹尖端附近应力从有限到无限的变化。为了模拟这种变化,在裂纹尖端附近,需要稠密的网格,计算工作量很大。并且,应力强度因子只能根据裂纹尖端场展开式间接推求,进一步影响了精度。据作者所知,迟至1971年,才见到 Wilson<sup>[34]</sup>采用 Kirchhoff 板元分析平板弯曲断裂问题。他仿照有限元解平面问题的技巧,在求得各节点挠度之后,根据经典板的 Williams 展开式推求应力强度因子。计算中,裂纹尖端单元的最大尺寸与裂纹长度之比为 0.005,可见工作量很大。

1976年,Barsoum<sup>[35]</sup>用厚板退化元配合畸变等参元解算板壳断裂问题,他在 Ziekiewicz<sup>[32]</sup>提出的厚板退化元基础上,将等参元边上的中间节点移到1/4边长的位置上。这种畸变等参元使裂纹尖端附近获得  $r^{-1/2}$  阶奇异性,相当于取了应力展开式的首项,不过单元内部角分布规律不完全符合真实情况,影响了精度。此外,该方法需要根据位移场用最小二乘法推求应力强度因子,增加了计算工作量,并且计算结果与计算选择点有关。据该文献称,无限大板的计算结果与文献[24]的解答相比,在  $h/a > 0.8$  时没有显著差异,但在薄板时误差较大。根据我们校核,误差最大时达到13%。

另一篇考虑剪切变形影响并采用奇异元技巧的文章是 Yagawa<sup>[36]</sup>于1979年发表的。他采用叠加法,将位移矢量表达为解析位移与有限元位移之和。解析位移的面内分量采用平面问题裂纹尖端展开式首项,面外位移采用经典板的 Williams 展开式首项。对于 I 型问题,这个解析位移刚好是 Reissner 型板裂纹尖端展开式首项,因而合理,但对于 II 型和复合型,这个位移模式就不合理。

采用叠加法的优点在于全板都取一种单元,不存在奇异元和常规元的连接问题,程序编制简单。但是仅取裂纹尖端位移场展开式首项作为位移模式,在远离裂纹尖端的地方会有显著误差。此外,当裂纹尖端靠近自由边界时,自由边界将出现较大的计算应力,需要反向叠加将其消去,加大了工作量。

Murthy 等<sup>[25]</sup>利用所求得的对称 I 型 Reissner 型板裂纹尖端场展开式,采用边界配点法计算断裂参量。虽然方法简单,但我们知道,在复杂的边界条件下,边界配点法的数值稳定性和收敛性问题都尚未解决。

还有一些类似研究,但总的说来,当时对含裂纹板壳的分析水平距工程分析的需要还很远。这促使了作者对含裂纹板壳的局部-整体法的系统研究。

## 2. 有限尺寸板壳断裂分析的局部-整体法

所谓断裂力学的局部-整体分析法,就是将裂纹尖端区域严格的“局部解”与结构整体分析中的各种常规的解析或数值方法相结合,对含裂纹构件进行断裂分析。在本书中主要是利用裂纹尖端位移应力场高阶展开式构造奇异元,然后与周围的常规元连接对含裂纹板壳进行断裂分析。这个方法综合了解析和数值法的优点,其技术关键是裂纹尖端“局部解”的获得。

著名的平面问题的 Williams 展开式<sup>[37]</sup>是断裂力学中的第一个局部解,以后许多学者<sup>[38~40]</sup>利用它构造裂纹尖端奇异元分析平面断裂问题,取得了成功。

Reissner 型板壳裂纹尖端场比平面问题的复杂得多。柳春图和他的学生们对此进行了系统的研究,解决了这一难题,为建立各类有限尺寸含裂纹板壳的局部-整体法奠定了坚实的基础。其中,柳春图、李英治<sup>[41,42]</sup>采用局部-整体法分析了含裂纹 Reissner 型板,柳春图、吴犀甲<sup>[43~45]</sup>采用局部-整体法分析了 Reissner 型球壳和圆柱壳,以后又进一步分析了含孔边裂纹的球壳和圆柱壳<sup>[46,47]</sup>。柳春图、张端重<sup>[48]</sup>提出了 Reissner 型板的一种简单而精度较高的近似方法。柳春图、蒋持平<sup>[49]</sup>推导了 Reissner 型板裂纹

尖端奇异元显式刚度矩阵。蒋持平等<sup>[50]</sup>还在 Williams<sup>[11]</sup>的工作的基础上,进一步推导了经典板裂纹尖端展开式的通项公式,并用它构造裂纹尖端高阶奇异元,给出了直至任意阶的显式刚度矩阵。数值计算说明了这个单元的高精度和数值稳定性。上述系统性的工作,有效地解决了有限尺寸板壳的断裂分析问题。

## § 1.6 含表面裂纹板壳

工程中,表面裂纹问题更为常见。由于这个问题本质的三维性,对它的分析也更为困难。本书介绍作者所提出的含表面裂纹板壳的局部-整体法,这是对含穿透裂纹板壳局部-整体法的一个自然推广<sup>[9,51~53]</sup>。

### 1. 表面裂纹问题的简短历史回顾

表面裂纹的研究可追溯到1962年, Irwin<sup>[54]</sup>提出了第一个表面裂纹的近似解,标志研究开始。1972年, Swedlow<sup>[55]</sup>编辑了国际上第一次表面裂纹专题会议文集,内容涉及表面裂纹的物理问题、力学模型、断裂准则、计算方法等,表明对表面裂纹问题进入全面分析研究的阶段。但此时,各学者所得结果还互不统一。至1979年, Newman 等<sup>[56]</sup>对表面裂纹的线弹性问题发表近万自由度的三维有限元结果,得到了比较普遍认可。ASTM E748-80<sup>[57]</sup>等工程规范或手册相继采用了他们提出的公式,表明工程界接受了他们的成果。然而大型三维有限元分析成本昂贵,限制了其在常规工程分析中的应用,同时它的精度也尚待进一步论证。人们仍在探索工程上更简单实用的方法,如权函数法<sup>[58,59]</sup>、体积力法<sup>[60]</sup>、边界元法等,此外还有一些工程简化模型如线弹簧模型<sup>[61,62]</sup>。它们各有优缺点。

### 2. 表面裂纹问题的局部-整体分析法

柳春图、李英治等<sup>[51,63~67]</sup>成功地将含穿透裂纹板壳的局部-整体法推广于表面裂纹问题。他们巧妙采用一种特殊的坐标变换,获得了半椭圆表面裂纹尖端场的高阶渐近展开式,用它构造高阶

奇异元,仅用828个自由度,就获得了Newman等<sup>[56]</sup>近万自由度的计算精度,为在常规工程分析中对表面裂纹问题进行精确计算开辟了道路。黎之奇、柳春图、胡振威等<sup>[64]</sup>进行了表面裂纹光弹实验并获得了与上述理论分析计算一致的结果。



## 第二章 Kirchhoff 板弯曲断裂理论

经典薄板理论或者说 Kirchhoff 板理论实用有效,被广泛应用,目前还没有其它平板理论能取代它的位置。虽然在含裂纹板的断裂分析中,Kirchhoff 板理论有理论缺陷,Reissner 型板理论更具科学性,然而由于 Kirchhoff 板弯曲断裂理论简单方便,所以仍具有它的实用价值。裂纹尖端场是断裂力学最为关注的问题,它是研究裂纹扩展机理,建立断裂准则的理论基础,也是发展数值方法计算断裂参数的力学基础。在回顾 Kirchhoff 平板理论<sup>[10, 69~72]</sup>的基本概念和公式之后,本章介绍了蒋持平等<sup>[50]</sup>基于 Williams<sup>[11]</sup>的工作所推导的 Kirchhoff 板弯曲裂纹尖端场直至任意阶的通项公式。它在第四章将被用于发展含裂纹 Kirchhoff 板分析的局部-整体法。

### § 2.1 Kirchhoff 板的基本概念和基本假定

由两个平行平面(称为板面)和垂直于这两个平面的柱面(称为侧面或板边)所围成的物体,称为平板,或简称为板,如图 2.1 所示。两板面之间的距离称为板的厚度,与两板面等距离的平面称为中面。若板厚  $h$  远小于中面的特征尺寸  $b$ (例如圆板的直径与矩形板短边之长),这块板就称为薄板,否则就是中厚板或厚板。对于一般的工程计算精度,当  $h/b < 1/5 \sim 1/8$ ,就可以按薄板计算。

作用在薄板上的载荷,总可以分解成板中面内的纵向载荷与垂直于中面的横向载荷。前者引出弹性力学的平面问题;后者引起薄板弯曲,是即将讨论的薄板弯曲问题。

薄板弯曲时,中面所弯成的曲面,称为薄板的弹性曲面,中面

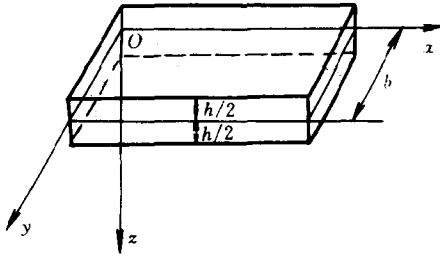


图2.1 平板

各点在垂直于中面方向上的位移  $w$ , 称为挠度。薄板小挠度理论只讨论这样的薄板: 它虽然很薄, 但仍具有相当的弯曲刚度, 因而它的挠度远小于它的厚度, 通常限制  $w/h < 1/5$ 。

薄板的小挠度理论, 建立在下面三个基本假定之上:

① 变形前垂直于中面的直线段, 在变形后保持直线, 仍然垂直于变形后的中面, 且其在长度方向的变形对挠度的影响可以略去。

② 中面内各点无面内位移。

③ 平行于中面的各层互不挤压。

## § 2.2 基本公式与弹性曲面微分方程

在上述基本假定的基础上, 可以利用弹性力学的几何方程、物理方程和平衡方程来建立弹性薄板小挠度理论的基本公式及弹性曲面微分方程。

如图2.2,  $Ox$  轴位于薄板变形前的中面内。垂直于中面的线段  $AB$ , 在薄板变形后移到  $A'B'$  (为了清楚, 夸大了挠度)。根据假定①和②, 线段  $AB$  在板变形过程中的位置变化可以分解为一个随线段  $AB$  的中点从点  $H$  到点  $H'$  的平移和一个绕  $H'$  的转动, 且平移的方向垂直于变形前的板中面。由图中的几何关系不难看出, 线段  $AB$  上任意一点在板变形后的直角坐标位移分量为

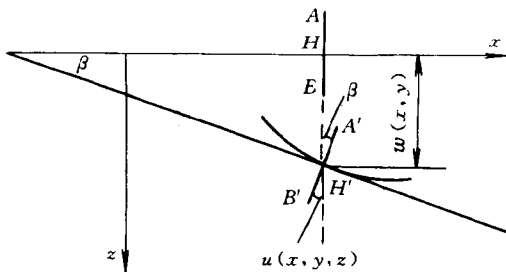


图2.2 板变形前后中面法线的位移

$$\begin{cases} u(x, y, z) = -z\beta = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

将位移分量式(2.1)代入弹性力学的几何方程,得到板内各点的应变分量为

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

由于挠度是微小的,弹性曲面在坐标方向的曲率及扭率可以近似用挠度表示为

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.4)$$

现在研究板内的应力分量。首先从假定③可以得出

$$\sigma_z = 0 \quad (2.5)$$

显然,这个假定引起了某些矛盾的地方。如果将应变分量代入弹性力学的物理方程,  $\tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  两个剪应力分量将为零,而正应力  $\sigma_z$  一般不为零。这个问题可以这样理解:薄板弯曲时,剪应力  $\tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  是次要的应力分量,它们引起的剪应变  $\gamma_{xz}$  和  $\gamma_{yz}$  可以略去,但自身却是维持平衡所必须的,不能忽略。 $\tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  可以从平衡方程求得。 $\sigma_z$  是更次要的应力分量,可以完全忽略。于是联系板的三个非零应变分量与三个主要应力分量的物理方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

其中  $E$  是杨氏模量,  $\nu$  是泊松比。由式(2.2)和(2.6),可以求得板中主要应力分量与挠度的关系式

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

为了研究应力分量  $\tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$ , 考虑弹性力学的平衡方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{q}{h} = 0 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

其中已经略去了含  $\sigma_z$  的项。垂直于板面的载荷  $q(x, y)$  被考虑为沿厚度均匀分布的体力  $q(x, y)/h$ 。不难证明,如果  $q$  是作用于板

面的面力,仅影响应力分量  $\sigma_z$ 。

为了求  $\tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$ , 将式(2.7)代入式(2.8)的前两式, 并对  $z$  积分, 注意到当  $z = \pm h/2$  时,  $\tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  为零, 可以得到

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{4z^2 - h^2}{8(1 - \nu^2)} E \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \tau_{yz} = \frac{4z^2 - h^2}{8(1 - \nu^2)} E \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (2.9)$$

一般说来, 难以使应力分量在薄板侧面上(板边上)精确地满足应力边界条件。只能应用圣维南原理, 使这些应力分量所构成的内力分量满足边界条件。下面推导内力表达式。

从式(2.7)看出, 三个主要应力分量沿板厚线性分布, 在横截面上形成弯矩  $M_x$ ,  $M_y$  和扭矩  $M_{xy}$ , 如图2.3所示。很容易通过积分求得这三个内力表达式

$$\begin{cases} M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2.10)$$

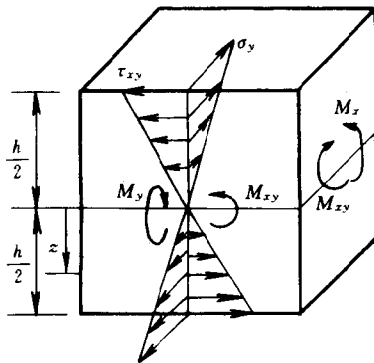


图2.3 构成板横截面弯矩和扭矩的应力分量

其中  $D$  是板的弯曲刚度

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.11)$$

横向剪应力分量  $\tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  沿板厚抛物线分布, 合成剪力  $Q_x$  和  $Q_y$ 。它可以由式(2.9)积分得到

$$\begin{cases} Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (2.12)$$

比较式(2.7)与(2.10), 式(2.9)与(2.12), 可以得到

$$\sigma_x = \frac{12z}{h^3} M_x \quad \sigma_y = \frac{12z}{h^3} M_y \quad \tau_{xy} = \frac{12z}{h^3} M_{xy} \quad (2.13)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3(h^2 - 4z^2)}{2h^3} Q_x \quad \tau_{yz} = \frac{3(h^2 - 4z^2)}{2h^3} Q_y \quad (2.14)$$

将式(2.8)的前两个方程乘以  $zdz$ , 第三个方程乘以  $dz$ , 从  $-h/2$  到  $h/2$  积分。利用分部积分公式并注意到  $\tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  在板面 ( $z = \pm h/2$  处) 为零, 获得以内力表示的平衡方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

方程组(2.15)也可以由直接考虑图2.4所示薄板的任一微分块(为简单起见, 只画出微分块的中面)的平衡获得。

将方程组(2.15)中消去  $Q_x$  和  $Q_y$ , 即得到以板的内力表示的平衡方程

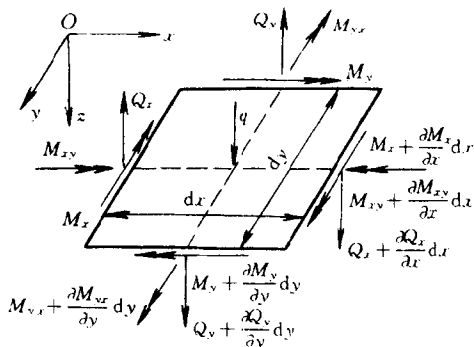


图2.4 薄板一微分块上的内力

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (2.16)$$

将上述方程中的内力根据式(2.10)用挠度  $w$  表示,便得到

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (2.17)$$

方程(2.17)称为薄板的弹性曲面微分方程,或挠曲微分方程,是薄板弯曲问题的基本微分方程。

## § 2.3 边界条件

### 1. 斜截面上的内力

在讨论边界条件之前,先研究任意斜截面上的内力。

如图2.5,在板上取微小三角块,其直角边分别与  $x$  轴和  $y$  轴平行,斜边  $AB$  为单位长。 $n$  为  $AB$  外法线方向,与  $x$  轴成  $\theta$  角, $s$  沿  $AB$  方向,且  $n$  到  $s$  的转向与  $x$  轴到  $y$  轴的转向相同。三角板边上的弯矩和扭矩用矢量表示。根据三角板在  $Oxy$  平面内力矩矢量的平衡关系,可以写出平衡方程,从而求得斜截面上弯矩  $M_n$  和扭矩  $M_{ns}$  的表达式。让截取斜面的方位转动  $90^\circ$ ,则可以求得弯矩  $M$ ,

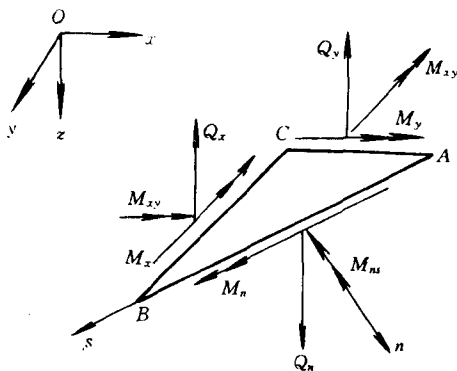


图2.5 板的斜截面上的内力

$$\begin{cases} M_n = l^2 M_x + 2lm M_{xy} + m^2 M_y \\ M_s = m^2 M_x - 2lm M_{xy} + l^2 M_y \\ M_{ns} = -lm M_x + (l^2 - m^2) M_{xy} + lm M_y \end{cases} \quad (2.18)$$

其中

$$l = \cos(n, x) = \cos\theta, \quad m = \cos(n, y) = \sin\theta \quad (2.19)$$

同样地,由图2.5中微小三角板边界上垂直于板面的分布剪力的平衡,可以求得

$$\begin{cases} Q_n = lQ_x + mQ_y \\ Q_s = -mQ_x + lQ_y \end{cases} \quad (2.20)$$

## 2. 主弯矩

从式(2.18)第三式可以看到,如果这样选择 $\theta$ 值,使得

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{2M_{xy}}{M_x - M_y} \quad (2.21)$$

那么此斜面上扭矩 $M_{ns}$ 为零。扭矩为零的方向被称作弯曲主方向,主方向上的弯矩称为主弯矩。从式(2.21)可以看出,一定存在两个互相垂直的弯曲主方向。不难求得,这两个弯曲主方向的主弯矩为

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{M_x + M_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2} \quad (2.22)$$

两个主方向角 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 分别为

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{M_1 - M_x}{M_{xy}}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{M_{xy}}{M_2 - M_y} \quad (2.23)$$

由式(2.22)可知



$$M_1 + M_2 = M_x + M_y \quad (2.24)$$

由式(2.23)和(2.24)又可得到

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = -1 \quad (2.25)$$

这应该是可以预料的,因为两个主方向互相垂直。

### 3. 边界条件

弹性薄板挠曲微分方程(2.17)是一个四阶双调和方程。为了使这个方程有唯一确定的解,在每条边上必须提供两个边界条件。

板的典型边界条件有三种:固支边、简支边和自由边。

① 固支边:边界挠度和法向转角为指定值。

$$w = \bar{w}, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \bar{\alpha} \quad (2.26)$$

② 简支边:边界挠度和法向弯矩为指定值。

$$w = \bar{w}, \quad M_n = \bar{M}_n \quad (2.27)$$

上两式中, $\bar{w}$ 、 $\bar{\alpha}$ 和 $\bar{M}_n$ 均为边界围线上的已知函数。

③ 自由边:自由边的特殊性给边界条件的处理造成了困难,需要深入讨论。根据问题的物理性质,自由边的边界条件有三个,即边界法向弯矩、扭矩和剪力分别等于指定值

$$M_n = \bar{M}_n, \quad M_{ns} = \bar{M}_{ns}, \quad Q_n = \bar{Q}_n \quad (2.28)$$

但四阶的挠曲微分方程只要求两个边界条件。为此 Kirchhoff 引入等效剪力

$$V_n = \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + Q_n \quad (2.29)$$

将自由边边界条件表述为法向弯矩和等效剪力等于指定值

$$M_n = \bar{M}_n \quad V_n = \bar{V}_n \quad (2.30)$$

在两自由边的交点,还需补充角点条件

$$w = w_0 \quad \text{或} \quad M_{ns}^+ - M_{ns}^- = P \quad (2.31)$$

其中 $w_0$ 为角点已知值, $P$ 为角点处集中剪力,上标+、一号表示扭矩在自由边角点两侧的极限值。

参见式(1.7),边界条件(2.30)可以由变分原理导出。为了得到较为直观的理解,下面由边界扭矩的等效变换来说明等效剪力

$V_n$  的物理意义。

图 2.6(a) 表示板的任意一段边界 (不一定是自由边界), 考察  $A$  点两侧长  $ds$  的两个微段; 微段  $A_1A$  上, 作用扭矩  $M_{ns}ds$ , 微段  $AA_2$  上, 作用扭矩  $\left(M_{ns} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} ds\right) ds$ 。在图 2.6(b) 中,  $A_1A$  微段上的扭矩  $M_{ns}ds$  等效变换为两个力  $M_{ns}$ : 一个作用在  $A_1$  点, 向下; 一个作用在  $A$  点, 向上。根据圣维南原理, 这种等效变换只显著影响这一边界点附近的应力, 对板的其余区域影响甚微。同样地, 作用在  $AA_2$  微段上的扭矩  $\left(M_{ns} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} ds\right) ds$  也可以等效变换为作用在  $A$  和  $A_2$  的两个力。在  $A$  点由两个微段等效变换来的力合成为向下的力  $(\partial M_{ns}/\partial s) ds$ 。按这种方式, 整个边界上的扭矩可以等效变换为等效分布剪力  $\partial M_{ns}/\partial s$ 。将它与分布剪力  $Q_n$  合成, 就是由式 (2.29) 所定义的等效分布剪力。

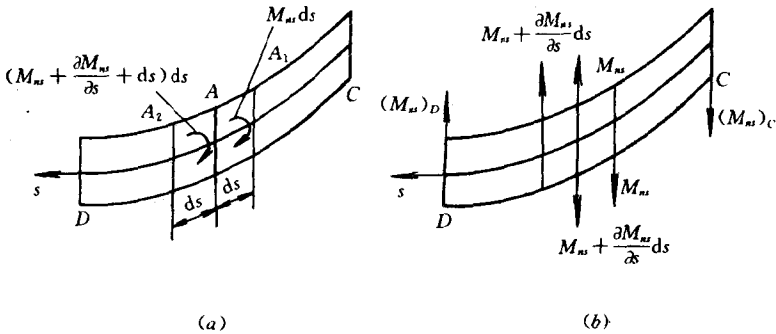


图 2.6 边界扭矩的等效变换

由图 2.6(b) 还可以看到, 在  $C$ 、 $D$  两点, 还有未被抵消的等效集中剪力, 大小为  $M_{ns}$ 。边界条件 (2.30) 只涉及  $\partial M_{ns}/\partial s$  之值, 因此在自由边端点还需补充一个端点条件。在自由边与固支边或简支边的交界点, 实际已经给定挠度值, 无需另外补充端点条件。在两自由边交点, 则需补充角点条件 (2.31): 如果角点有支承, 补充给出角点挠度值  $w_0$ ; 如果角点无支承, 补充给出扭矩  $M_{ns}$  在角点的跳跃值, 这个跳跃值等于角点所受的横向集中力  $P$ , 当  $P=0$  时, 扭矩

$M_{ns}$ 在角点连续。

最后指出,如果自由边界任一点  $s=s_0$  处作用有集中载荷  $P_0$ ,那么边界扭矩之值将在此点跳跃

$$M_{ns}^+(s_0) - M_{ns}^-(s_0) = P_0 \quad (2.32)$$

由以上分析可以看出, Kirchhoff 所提出的等效剪力概念在仅影响自由边附近很小区域受力状态的代价下合理处理了经典薄板的自由边边界条件问题,使得经典板理论得到了广泛应用。然而对于涉及板的自由边邻近力学性质的孔口与裂纹问题,这个理论就存在它的固有缺陷。

## § 2.4 弹性薄板的应变能

按照弹性薄板小挠度弯曲理论的假定,不计应变分量  $\epsilon_z, \gamma_{yz}$  和  $\gamma_{xz}$ , 于是在线弹性情形,板的应变能表达式简化为

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (2.33)$$

将板的应变分量表达式(2.2)、应力分量表达式(2.7)代入式(2.33),并完成对板厚的积分,得到

$$U = \frac{1}{2} \iint D \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (2.34)$$

其中  $D$  是板的弯曲刚度。如果板是等厚度,  $D$  为常量。 $D$  的表达式已由式(2.11)给出。 $\nabla^2$  是拉普拉斯算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.35)$$

## § 2.5 极坐标下的挠曲面微分方程与内力公式

### 1. 坐标变换

研究裂纹尖端场时,采用极坐标比较方便。如图2.7以裂纹尖

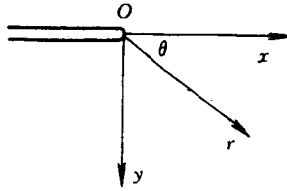


图2.7 在裂纹尖端的直角坐标与极坐标

端为原点建立直角坐标系和极坐标系,则两坐标系的关系为

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad (2.36)$$

将式(2.36)对  $x$  求偏导数,得到

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta - \frac{\partial \theta}{\partial x}r\sin\theta = 1 \\ \frac{\partial r}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x}r\cos\theta = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

由上式

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r} \quad (2.38)$$

同样地,将式(2.36)对  $y$  求偏导数可以得到

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r} \quad (2.39)$$

根据复合函数的链式求导法则

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} \end{cases} \quad (2.40)$$

二阶偏导数则可将求式(2.40)的运算重复一遍得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \right) \left( \frac{\partial}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \right) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\cos^2\theta - \frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r} + \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \sin^2\theta + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\cos^2\theta}{r} - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2\theta}{r^2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\sin\theta\cos\theta}{r} - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

于是在极坐标下的拉普拉斯算子和双调和算子分别为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.44)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.45)$$

## 2. 极坐标下的挠曲微分方程与内力公式

利用上节导出的坐标变换公式,在极坐标下薄板的挠曲面微分方程可以写为

$$\nabla^2 \nabla^2 w(r, \theta) = \frac{q}{D} \quad (2.46)$$

其中双调和算子  $\nabla^2 \nabla^2$  已由式(2.45)给出。

为了将横截面上的内力表达式变换为极坐标形式,研究如图 2.8 由板中截出一微小板元。此板元的侧面是夹角为  $d\theta$  的两相邻径向平面以及半径分别为  $r$  和  $r+dr$  的两圆柱面(为简化图形,仅画出板元的中面)。板元边界弯矩  $M_r, M_\theta$ , 扭矩  $M_{r\theta}$ , 剪力  $Q_r$  和  $Q_\theta$  如图所示。

把  $x$  轴和  $y$  轴分别转到这个板元的  $r$  和  $\theta$  方向。当  $\theta$  为零时,极坐标下内力  $M_r, M_\theta$  和  $M_{r\theta}$  之值分别与直角坐标下内力  $M_x, M_y$  和  $M_{xy}$  之值相等。据此,将式(2.41)~(2.43)代入式(2.10)和

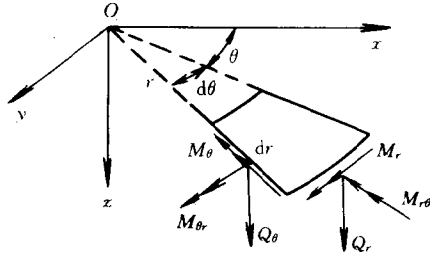


图2.8 极坐标下板的内力

(2.12), 并命  $\theta=0$ , 得到

$$\begin{cases} M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta = -D \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ M_{r,\theta} = -D(1-\nu) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (2.47)$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w, \quad Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w \quad (2.48)$$

等效剪力式(2.29)的极坐标形式为

$$\begin{cases} V_r = -D \left( \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r,\theta}}{\partial \theta} \right) \\ V_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w + \frac{\partial M_{r,\theta}}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (2.49)$$

板的应力表达式(2.13)和(2.14)的极坐标形式为

$$\sigma_r = \frac{12z}{h^3} M_r, \quad \sigma_\theta = \frac{12z}{h^3} M_\theta, \quad \tau_{r\theta} = \frac{12z}{h^3} M_{r,\theta} \quad (2.50)$$

$$\tau_{rz} = \frac{3(h^2 - 4z^2)}{2h^3} Q_r, \quad \tau_{\theta z} = \frac{3(h^2 - 4z^2)}{2h^3} Q_\theta \quad (2.51)$$

## § 2.6 裂纹尖端场特征展开式通项公式

如图2.7, 在以裂纹尖端为中心的极坐标系下, 方程(2.46)所

对应的齐次方程为:

$$\nabla^2 \nabla^2 w(r, \theta) = 0 \quad (2.52)$$

裂纹面是不受力的自由边界。在极坐标下,边界条件(2.30)化为

$$\begin{cases} M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) = 0 \\ V_\theta = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial \theta} + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] = 0 \end{cases} \quad \text{在 } \theta = \pm \pi \quad (2.53)$$

将挠度  $w$  表示为特征展开级数

$$w(r, \theta) = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} F_{\lambda}(\theta) \quad (2.54)$$

并代入方程(2.52),得到

$$\begin{aligned} \frac{d^4 F_{\lambda}(\theta)}{d\theta^4} + [(\lambda + 1)^2 + (\lambda - 1)^2] \frac{d^2 F_{\lambda}(\theta)}{d\theta^2} + \\ (\lambda + 1)^2 (\lambda - 1)^2 F_{\lambda}(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

求出方程(2.55)的通解后,特征展开式(2.54)可以进一步写为

$$\begin{aligned} w(r, \theta) = \sum_{\lambda_n} r^{\lambda_n+1} [A_n^{(1)} \cos(\lambda_n + 1)\theta + A_n^{(2)} \cos(\lambda_n - 1)\theta + \\ A_n^{(3)} \sin(\lambda_n + 1)\theta + A_n^{(4)} \sin(\lambda_n - 1)\theta] \end{aligned} \quad (2.56)$$

将式(2.56)代入裂纹面边界条件(2.53),得到以特征展开系数为未知数的齐次线代数方程组。此方程组有非零解的条件是其系数行列式为零。由这一条件得出

$$\sin 2\pi \lambda_n = 0 \quad (2.57)$$

由此得到

$$\lambda_n = n/2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.58)$$

其中,根据裂纹尖端附近应变能有限的原则,已经删去了  $n \leq 0$  的值。根据裂纹面的边界条件还可以求得式(2.56)中各待定系数之间的一些关系,独立的待定系数个数减少。经过运算整理,最后获得挠度  $w$  在裂纹尖端特征展开式的通项公式

$$w = \sum_{\lambda_n} w(\lambda_n) \quad (2.59)$$

① 当  $\lambda_n$  为半整数, 即  $\lambda_n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

$$\begin{aligned} w(\lambda_n) = r^{\lambda_n+1} \{ & [\cos(\lambda_n + 1)\theta - \\ & \frac{(\lambda_n + 1)(1 - \nu)}{3 + \lambda_n + (1 - \lambda_n)\nu} \cos(\lambda_n - 1)\theta] a_n + \\ & \left[ \sin(\lambda_n + 1)\theta + \frac{(\lambda_n + 1)(1 - \nu)}{3 - \lambda_n + (1 + \lambda_n)\nu} \sin(\lambda_n - 1)\theta \right] b_n \} \end{aligned} \quad (2.60)$$

其中待定系数  $a_n$  和  $b_n$  分别相应于关于  $x$  轴的对称与反对称变形。

② 当  $\lambda_n$  为整数, 即  $\lambda_n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} w(\lambda_n) = r^{\lambda_n+1} \{ & [\cos(\lambda_n + 1)\theta + \\ & \frac{(\lambda_n + 1)(1 - \nu)}{3 - \lambda_n + (1 + \lambda_n)\nu} \cos(\lambda_n - 1)\theta] a_n + \\ & \left[ \sin(\lambda_n + 1)\theta - \frac{(\lambda_n + 1)(1 - \nu)}{3 + \lambda_n + (1 - \lambda_n)\nu} \sin(\lambda_n - 1)\theta \right] b_n \} \end{aligned} \quad (2.61)$$

下面利用挠度  $w$  在裂纹尖端特征展开式的通项公式(2.60)和(2.61), 具体写出其前五项展开式

$$\begin{aligned} w = r^{\frac{3}{2}} \left\{ \left[ -\cos \frac{3}{2}\theta + \frac{3(1 - \nu)}{7 + \nu} \cos \frac{\theta}{2} \right] a_1 + \right. \\ \left. \left[ \sin \frac{3}{2}\theta - \frac{3(1 - \nu)}{5 + 3\nu} \sin \frac{\theta}{2} \right] b_1 \right\} + \\ r^2 \left\{ \left[ \cos 2\theta + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \right] a_2 + [\sin 2\theta] b_2 \right\} + \\ r^{\frac{5}{2}} \left\{ \left[ \cos \frac{5}{2}\theta - \frac{5(1 - \nu)}{9 - \nu} \cos \frac{\theta}{2} \right] a_3 + \right. \\ \left. \left[ \sin \frac{5}{2}\theta + \frac{5(1 - \nu)}{3 + 5\nu} \sin \frac{\theta}{2} \right] b_3 \right\} + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& r^3 \left\{ \left[ \cos 3\theta + \frac{3(1-\nu)}{1+3\nu} \cos \theta \right] a_4 + \right. \\
& \left. \left[ \sin 3\theta - \frac{3(1-\nu)}{5-\nu} \sin \theta \right] b_4 \right\} + \\
& r^{\frac{7}{2}} \left\{ \left[ \cos \frac{7}{2}\theta - \frac{7(1-\nu)}{11-3\nu} \cos \frac{3}{2}\theta \right] a_5 + \right. \\
& \left. \left[ \sin \frac{7}{2}\theta + \frac{7(1-\nu)}{1+7\nu} \sin \frac{3}{2}\theta \right] b_5 \right\} + \dots \quad (2.62)
\end{aligned}$$

将挠度  $w$  的特征展开式代入板的应力、应变和内力公式, 就得到经典板弯曲裂纹尖端的应力应变场及内力场展开式的通项公式。

## § 2.7 Kirchhoff 板弯曲应力强度因子

将挠度  $w$  的展开式(2.62)代入板的内力公式(2.47), 再代入式(2.50), 即得到极坐标下板内三个主要应力的展开式, 它们的前两项为

$$\begin{aligned}
\frac{2\sigma_r}{3G} &= \frac{z}{\sqrt{r}} \left\{ \left[ \cos \frac{3}{2}\theta - \frac{3+5\nu}{7+\nu} \cos \frac{\theta}{2} \right] a_1 + \right. \\
& \left. \left[ -\sin \frac{3}{2}\theta + \frac{3+5\nu}{5+3\nu} \sin \frac{\theta}{2} \right] b_1 \right\} - \\
& \frac{8}{3} z \{ [1 + \cos 2\theta] a_2 + [\sin 2\theta] b_2 \} + \dots \quad (2.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2\sigma_\theta}{3G} &= \frac{z}{\sqrt{r}} \left\{ \left[ -\cos \frac{3}{2}\theta - \frac{5+3\nu}{7+\nu} \cos \frac{\theta}{2} \right] a_1 + \right. \\
& \left. \left[ \sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2} \right] b_1 \right\} - \\
& \frac{8}{3} z \{ [1 - \cos 2\theta] a_2 - [\sin 2\theta] b_2 \} + \dots \quad (2.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2\tau_{r\theta}}{3G} = & \frac{z}{\sqrt{r}} \left\{ \left[ -\sin \frac{3}{2}\theta + \frac{1-\nu}{7+\nu} \sin \frac{\theta}{2} \right] a_1 + \right. \\ & \left. \left[ -\cos \frac{3}{2}\theta + \frac{1-\nu}{5+3\nu} \cos \frac{\theta}{2} \right] b_1 \right\} + \\ & \frac{8}{3} z \{ [\sin 2\theta] a_2 - [\cos 2\theta] b_2 \} + \dots \end{aligned} \quad (2.65)$$

从式(2.63)~(2.65)可以看到,经典板弯曲的三个主要应力在板面数值最大,且在弯曲裂纹尖端与平面裂纹类似,奇异性为 $r^{-1/2}$ 阶,角分布函数与外载和板的几何形状无关(虽然分布规律不同)。Sih 和 Paris<sup>[12]</sup>比照平面裂纹问题定义了所谓经典板弯曲应力强度因子 $K_1$ 与 $K_2$ 。 $K_1$ 与 $K_2$ 与经典板裂纹尖端场展开式首项的系数之间的关系为(注意不同文献定义的应力强度因子可能相差常数乘子 $\sqrt{\pi}$ )

$$K_1 = - \frac{3 \sqrt{2\pi}(3+\nu)Gh}{7+\nu} a_1 \quad (2.66)$$

$$K_2 = - \frac{3 \sqrt{2\pi}(3+\nu)Gh}{5+3\nu} b_2 \quad (2.67)$$

将 $w$ 的展开式代入板中较小的应力分量 $\tau_{rz}$ 与 $\tau_{\theta z}$ 的表达式,可以发现

$$\tau_{rz} \propto r^{-3/2}, \quad \tau_{\theta z} \propto r^{-3/2} \quad (2.68)$$

这个奇异性与较精确的板弯曲理论和三维分析所得结论不符,因而这个结果在理论上存在缺陷。此外,经典板弯曲裂纹尖端应力场的角分布规律也与平面裂纹尖端应力场的角分布规律不同。这些问题,将在以后有关章节讨论。

## 第三章 含裂纹 Kirchhoff 板断裂分析的 复变函数方法

Kirchhoff 板弯曲方程的通解的复变函数表示,是 1938 年 Лехницкий 按照 Колосов 和 Мусхелишвили 处理弹性平面问题的方式首先引入的。复变函数方法在含裂纹 Kirchhoff 板的断裂分析中,尤其在寻求问题的解析解方面显示了优越性。

在叙述复变函数方法的基本理论和公式之后,本章主要介绍含裂纹 Kirchhoff 板断裂分析的所谓复变-主部分析法。蒋持平等的研究表明这个方法对于平面裂纹问题<sup>[15~19]</sup>和 Kirchhoff 板的弯曲裂纹问题的分析都非常简单有效。本章采用这个方法较为简捷地导出了一大类 Kirchhoff 板弯曲裂纹问题的全场封闭形式解,其中包括典型问题的经典解答,也包括许多有意义的新结果<sup>[20,21]</sup>。同时在理论上,本章还解决了不同裂纹间复函数  $\Phi(z)$  中虚常数之值跳跃的物理意义和此常数之确定方法等重要问题。

### § 3.1 基本方程和公式的复变函数表示

#### 1. 弹性曲面微分方程的复变函数表示

Kirchhoff 板弹性曲面微分方程(2.17)所对应的齐次方程是一个双调和方程,它的通解可以用两个解析函数表示<sup>[13,14,70]</sup>:

$$w = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] \quad (3.1)$$

式中  $\varphi(z)$  和  $\chi(z)$  都是复平面  $z = x + iy$  上的解析函数,  $\operatorname{Re}$  表示取函数实部,上方横线表示取共轭。方程(2.17)的通解可以写成式(3.1)与一个特解之和。如果  $q$  为均布载荷,它的一个特解  $w^*$  可以写为

$$w^* = \frac{q}{64D} z^2 \bar{z}^2 \quad (3.2)$$

对于边缘受力的板(本章研究这种情形),  $q=0$ , 因而特解  $w^*=0$ 。

## 2. 内力和位移

对于边缘受力的板, 将通解(3.1)代入式(2.10)和(2.12), 得到各内力的复变函数表达式

$$\begin{cases} M_x = -D\{(1+\nu)[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + \frac{1-\nu}{2}[\bar{z}\varphi''(z) + z\overline{\varphi''(z)} + \psi'(z) + \overline{\psi'(z)}]\} \\ M_y = -D\{(1+\nu)[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] - \frac{1-\nu}{2}[\bar{z}\varphi''(z) + z\overline{\varphi''(z)} + \psi'(z) + \overline{\psi'(z)}]\} \\ M_{xy} = -i\frac{D(1-\nu)}{2}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) - z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)}] \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} Q_x = -2D[\varphi''(z) + \overline{\varphi''(z)}] \\ Q_y = -2iD[\varphi''(z) - \overline{\varphi''(z)}] \end{cases} \quad (3.4)$$

上两式中, 右上角的撇号表示对  $z$  求导, 并且已设

$$\psi(z) = \chi'(z) \quad (3.5)$$

为了计算上的方便, 将各内力素写成如下复组合式

$$\begin{cases} M_y - M_x + 2iM_{xy} = 2D(1-\nu)[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \\ M_x + M_y = -2D(1+\nu)[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ Q_x - iQ_y = -4D\varphi''(z) \end{cases} \quad (3.6)$$

利用式(2.1)和通解(3.1), 板的面内位移也可以以复组合式表示为

$$u + iv = -\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right) = -\delta[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}] \quad (3.7)$$

其中, 为了避免与复变量  $z$  混淆, 已将沿板的厚度的坐标改用  $\delta$  表示。设

$$\varphi'(z) = \Phi(z) \quad \psi'(z) = \Psi(z) \quad (3.8)$$

则内力和位移的表达式(3.6)和(3.7)可以写为

$$\begin{cases} M_y - M_x + 2iM_{xy} = 2D(1-\nu)[z\Phi'(z) + \Psi(z)] \\ M_x + M_y = -2D(1+\nu)[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \\ Q_x - iQ_y = -4D\Phi'(z) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$u' + iv' = -\delta[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}] \quad (3.10)$$

其中  $u$  与  $v$  上方的撇号表示对坐标  $x$  求导

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x} \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.11)$$

### 3. 板的任意弧线上内力的合力与合力矩

如图 3.1 所示,沿任意闭围线  $s$  将板切开,保留  $s$  以内的部分(为图形简单,没有画出板厚),则板的去掉部分作用在保留部分上有分布剪力  $Q_n$ ,分布弯矩  $M_n$  和分布扭矩  $M_{ns}$ 。在  $ds$  微段上,这些

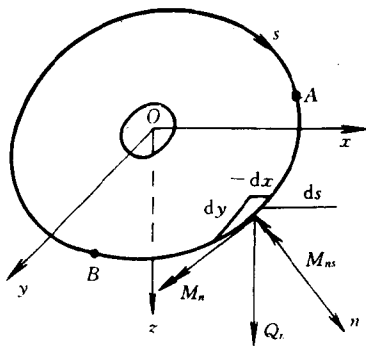


图 3.1 板任意截取部分的周界力与力矩

作用力的合力和合力矩在坐标轴方向的分量的大小为

$$\begin{cases} dQ_z^0 = Q_n ds \\ dM_x^0 = -lM_n ds - mM_{ns} ds + Q_n y ds \\ dM_y^0 = lM_n ds - mM_{ns} ds - Q_n x ds \end{cases} \quad (3.12)$$

其中  $l, m$  是边界  $ds$  的外法线的方向余弦,注意到

$$m ds = -dx \quad l ds = dy \quad (3.13)$$

将式(2.18)和(2.20)代入式(3.12),并沿周线积分,经整理,得到

周线  $s$  的  $AB$  段上作用力的合力与合力矩的复组合式

$$Q_z^0 = \int_A^B (Q_x dy - Q_y dx) \quad (3.14)$$

$$M_x^0 + iM_y^0 = \int_A^B [(M_y + izQ_y - iM_{xy})dx + (iM_x - M_{xy} - izQ_x)dy] \quad (3.15)$$

将式(3.3)和(3.4)代入(3.14)和(3.5),完成积分,得到

$$Q_z^0 = 2iD[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}]_A^B \quad (3.16)$$

$$M_x^0 + iM_y^0 = D\{(1-\nu)[\overline{\psi(z)} + z\overline{\varphi'(z)}] - (3+\nu)\varphi(z) - 2z[\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)]\}_A^B \quad (3.17)$$

假定在围线  $s$  内,例如孔的周界上,外力作用力的主矢为  $Q_z^*$ ,主矩为  $M_x^* + iM_y^*$ ,则由板的平衡条件可以知道

$$Q_z^* = 2iD[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}]_s \quad (3.18)$$

$$M_x^* + iM_y^* = D\{(1-\nu)[\overline{\psi(z)} + z\overline{\varphi'(z)}] - (3+\nu)\varphi(z) - 2z[\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)]\}_s \quad (3.19)$$

其中下标  $s$  表示沿边界坐标  $s$  的负向绕行一周的增量。

## § 3.2 所引入函数的确定程度与一般形式

### 1. 所引入各函数的确定程度

现在研究在给定板的应力状态或给定板的位移时,所引入的函数  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$ ,  $\chi(z)$ ,  $\Phi(z)$  与  $\Psi(z)$  将会被确定到何种程度这一重要问题。

首先研究给定应力的情形。由式(3.6)的第二式知道,  $\varphi'(z)$  可以添加一个虚常数  $iC$  而不影响板的应力状态,我们说  $\varphi'(z)$  精确到常数项  $iC$ 。由积分知  $\varphi(z)$  精确到  $iCz + \alpha_1^* + i\beta_1^*$ 。由式(3.6)的第一式知,  $\psi(z)$  精确到  $\alpha_2^* + i\beta_2^*$ 。注意到式(3.5),由积分知道  $\chi(z)$  精确到  $(\alpha_2^* + i\beta_2^*)z + (\alpha_3^* + i\beta_3^*)$ , 其中  $C, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \beta_1^*, \beta_2^*$  和  $\beta_3^*$  均为实常数。注意到式(3.8),由微分知道  $\Phi(z)$  精确到  $iC, \Psi(z)$  则没有可以随意添加的项。

为了消除函数  $\varphi(z)$  和  $\psi(z)$  的任意性, 我们可以给它们三个附加条件。在有限单连通域, 可以把原点选在区域内任意一点, 并令

$$\operatorname{Im}[\varphi'(0)] = 0; \quad \varphi(0) = 0; \quad \psi(0) = 0 \quad (3.20)$$

其中  $\operatorname{Im}$  表示取一个复函数或一个复数的虚部。对于带一孔的无限域, 则可以将原点选在孔内, 并令

$$\operatorname{Im}[\varphi'(\infty)] = 0; \quad \varphi(\infty) = 0; \quad \psi(\infty) = 0 \quad (3.21)$$

如果定义

$$\begin{cases} \varphi_0(z) = iCz + \alpha_1^* + i\beta_1^* \\ \psi_0(z) = \alpha_2^* + i\beta_2^* \\ \chi(z) = (\alpha_2^* + i\beta_2^*)z + \alpha_3^* + i\beta_3^* \end{cases} \quad (3.22)$$

则显然式(3.22)可以叠加到任意一组复函数解上而不影响这组解所给出的应力。将式(3.22)代入式(3.1)和(3.7), 得到

$$\begin{cases} u_0 = -\delta(\alpha_1^* + \alpha_2^*) \\ v_0 = -\delta(\beta_1^* - \beta_2^*) \\ w_0 = (\alpha_1^* + \alpha_2^*)x + (\beta_1^* - \beta_2^*)y + \alpha_3^* \end{cases} \quad (3.23)$$

如同所预料的, 式(3.23)对应于板的刚体位移。如果再给定位移, 则这种刚体位移也被约束了, 式(3.23)中各位移分量为零, 于是有

$$\alpha_2^* = -\alpha_1^*; \quad \beta_2^* = \beta_1^*; \quad \alpha_3^* = 0 \quad (3.24)$$

可见, 给定板的位移, 7个任意实常数  $C_1, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \beta_1^*, \beta_2^*$  和  $\beta_3^*$  只剩下4个是独立的。

最后可以得出结论:

若将

$$\begin{cases} \text{函数 } \varphi(z) \text{ 代以 } \varphi(z) + iCz + \alpha_1^* + i\beta_1^* \\ \text{函数 } \psi(z) \text{ 代以 } \psi(z) + \alpha_2^* + i\beta_2^* \\ \text{函数 } \chi(z) \text{ 代以 } \chi(z) + (\alpha_2^* + i\beta_2^*)z + \alpha_3^* + i\beta_3^* \end{cases} \quad (3.25)$$

时, 板的应力状态不变。如欲保持板内各点位移不变, 则(3.25)型代换还须受到条件式(3.24)的约束。

## 2. 函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的一般形式

①板所占的区域为有限单连通域, 则函数  $\varphi(z)$  和  $\psi(z)$  在域内

都是单值解析函数。

②有限二连通域。如图3.2所示,有限板内部被一孔削弱,坐标原点设在孔内。

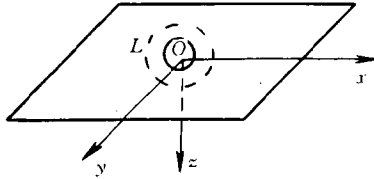


图3.2 含一孔的有限板

由式(3.9)的第二式可以知道, $\Phi(z)$ 的实部是单值的,但虚部可能多值。当沿包围孔的任意闭围线 $L$ 绕行一周时,设 $\Phi(z)$ 得到 $2\pi iA$ 的增量,其中 $A$ 是实常数, $2\pi i$ 是为了方便添加的。显然 $\Phi(z)$ 可以写为

$$\Phi(z) = A \ln z + \Phi^*(z) \quad (3.26)$$

其中 $\Phi^*(z)$ 是此二连通域内的单值解析函数。将式(3.26)积分得到

$$\varphi(z) = Az \ln z + (\alpha_1 + i\beta_1) \ln z + \varphi^*(z) \quad (3.27)$$

其中 $\varphi^*(z)$ 是此二连通域内的单值解析函数。

又从式(3.9)第一式知道, $\Psi(z)$ 是单值的,但它的积分可能是多值函数,分别积分一次和积分两次,得到

$$\psi(z) = \int \Psi(z) dz = (\alpha_2 + i\beta_2) \ln z + \psi^*(z) \quad (3.28)$$

$$\chi(z) = (\alpha_2 + i\beta_2) z \ln z + (\alpha_3 + i\beta_3) \ln z + \chi^*(z) \quad (3.29)$$

再考虑位移单值条件。利用式(3.7)可以写出

$$\{u + iv\}_L = -\delta \{ \varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \}_L = 0 \quad (3.30)$$

其中 $\{ \}_L$ 表示环绕 $L$ 一周时,括号内式子的增量。

将式(3.27)和(3.28)代入(3.30),得到

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0; \quad \beta_1 + \beta_2 = 0 \quad (3.31)$$

于是式(3.27)和(3.28)可以写为



$$\begin{cases} \varphi(z) = Az \ln z + a \ln z + \varphi^*(z) \\ \psi(z) = \bar{a} \ln z + \psi^*(z) \end{cases} \quad (3.32)$$

其中  $a = \alpha_1 + i\beta_1$ ,  $\bar{a} = \alpha_1 - i\beta_1$ 。

③带一孔的无限单连通域。此时式(3.32)仍然成立。将式(3.32)代入式(3.18)和(3.19),可以将常数  $A$  和  $a$  用作用在孔周界上外力的主矢和主矩来表示,  $\varphi(z)$  和  $\psi(z)$  能够进一步表示为

$$\begin{cases} \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{iQ_z^*}{4D} z + \frac{M_x^* + iM_y^*}{4D} \right] \ln z + \varphi^*(z) \\ \psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{M_x^* - iM_y^*}{4D} \ln z + \psi^*(z) \end{cases} \quad (3.33)$$

取坐标原点为圆心且包围孔洞在内的圆周  $L_R$ , 按 Laurent 定理,  $\varphi^*(z)$  和  $\psi^*(z)$  在  $L_R$  外可以展开成无穷级数

$$\varphi^*(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n; \quad \psi^*(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a'_n z^n \quad (3.34)$$

其中  $a_n$  和  $a'_n$  为复常数。考虑一种对实际工程分析有重要意义的情形, 即板在远处是均匀应力状态的情形。将式(3.33)和(3.34)代入式(3.6), 根据远处弯矩和扭矩为有限值的条件得到

$$a_n = 0 \quad a'_n = 0 \quad n \geq 2 \quad (3.35)$$

并且在这种情形里必须满足条件

$$Q_z^* = 0 \quad (3.36)$$

于是在远处为均匀应力时, 函数  $\varphi(z)$  和  $\psi(z)$  的形式为

$$\begin{cases} \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{M_x^* + iM_y^*}{4D} \ln z + (B + iC)z + \varphi_0(z) \\ \psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{M_x^* - iM_y^*}{4D} \ln z + (B' + iC')z + \psi_0(z) \end{cases} \quad (3.37)$$

在  $L_R$  外, 有

$$\varphi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}; \quad \psi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k z^{-k} \quad (3.38)$$

注意到  $iCz$  是不影响应力的项, 可以去掉。将式(3.37)对  $z$  求导, 得到

$$\begin{cases} \Phi(z) = \Gamma + \frac{1}{2\pi i} \frac{M_x^* + iM_y^*}{4D} \frac{1}{z} + \Phi_0(z) \\ \Psi(z) = \Gamma' - \frac{1}{2\pi i} \frac{M_x^* - iM_y^*}{4D} \frac{1}{z} + \Psi_0(z) \end{cases} \quad (3.39)$$

其中已设

$$B = \Gamma; \quad B' + iC' = \Gamma'$$

在  $L_R$  外

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^{-k}; \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=2}^{\infty} b'_k z^{-k} \quad (3.40)$$

设无穷远的弯矩为  $M_x^\infty, M_y^\infty$ , 扭矩为  $M_{xy}^\infty$ , 将式(3.49)代入式(3.9)且令  $|z| \rightarrow \infty$ , 可求得

$$\Gamma = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}; \quad \Gamma' = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iM_{xy}^\infty}{2D(1-\nu)} \quad (3.41)$$

参看 § 2.3, 也可以将  $\Gamma$  和  $\Gamma'$  用无穷远主弯矩表示

$$\Gamma = -\frac{M_1^\infty + M_2^\infty}{4D(1+\nu)}; \quad \Gamma' = \frac{M_2^\infty - M_1^\infty}{2D(1-\nu)} e^{2i\alpha} \quad (3.42)$$

其中  $\alpha$  是主弯矩  $M_1^\infty$  所在微体主面法线与  $x$  轴的夹角。

④多连通无限域。所研究的问题是被  $n$  个孔所削弱的无限板。我们按同样方式可以推出

$$\begin{cases} \varphi(z) = \sum_{j=1}^n (A_j z + a_j) \ln(z - z_j) + \varphi^*(z) \\ \psi(z) = \sum_{j=1}^n \bar{a}_j \ln(z - z_j) + \psi^*(z) \end{cases} \quad (3.43)$$

其中  $z_j$  是第  $j$  个孔周界内一点。在包含所有孔洞的圆周  $L_R$  外,  $\varphi^*(z)$  和  $\psi^*(z)$  也可以展开成由式(3.34)所给出的无穷级数。

### § 3.3 坐标变换与边界条件

#### 1. 坐标变换

##### (1) 坐标平移

首先研究函数  $\Phi(z)$  和  $\Psi(z)$  在直角坐标系下的平移变换。

设原点被平移到新点 $(x_0, y_0)$ , 并设 $(x, y)$ 与 $(x_1, y_1)$ 分别为同一点在旧与新坐标系中的坐标, 且

$$z_0 = x_0 + iy_0; \quad z = x + iy; \quad z_1 = x_1 + iy_1 \quad (3.44)$$

显然

$$z = z_1 + z_0 \quad (3.45)$$

在新坐标系里, 用 $\Phi_1(z)$ 和 $\Psi_1(z)$ 表示函数 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 在旧坐标系里起同样作用的函数。因为原点移动时板的内力不变, 所以根据式(3.9)第二式知道

$$\operatorname{Re}\Phi(z) = \operatorname{Re}\Phi_1(z_1) = \operatorname{Re}\Phi_1(z - z_0) \quad (3.46)$$

由此

$$\Phi(z) = \Phi_1(z - z_0) \quad (3.47)$$

又根据式(3.9)第一式

$$\begin{aligned} \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) &= \bar{z}_1\Phi_1'(z_1) + \Psi_1(z_1) = \\ &= \bar{z}\Phi_1'(z - z_0) + \Psi_1(z - z_0) - \bar{z}_0\Phi_1'(z - z_0) \end{aligned} \quad (3.48)$$

由式(3.47)和(3.48), 可以知道

$$\Psi(z) = \Psi_1(z - z_0) - \bar{z}_0\Phi_1'(z - z_0) \quad (3.49)$$

将式(3.47)和(3.49)对 $z$ 积分, 并略去不影响应力的任意常数, 得到

$$\varphi(z) = \varphi_1(z - z_0); \quad \psi(z) = \psi_1(z - z_0) - \bar{z}_0\varphi'(z - z_0) \quad (3.50)$$

## (2) 直角坐标系下的旋转变换

按与上面相同的分析方式, 可以求得当直角坐标系旋转了角度 $\alpha$ 时, 函数 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 的变换公式

$$\Phi(z) = \Phi_1(ze^{-i\alpha}); \quad \Psi(z) = \Psi_1(ze^{-i\alpha})e^{-2i\alpha} \quad (3.51)$$

## (3) 极坐标下的内力公式

直角坐标与极坐标关系式的复数形式为

$$z = x + iy = re^{i\theta} \quad (3.52)$$

参考 § 2.3, 可知两坐标系中内力换算关系为

$$\begin{cases} M_r + M_\theta = M_x + M_y \\ M_\theta - M_r + 2iM_{r\theta} = [(M_y - M_x) + 2iM_{xy}]e^{2i\theta} \\ Q_r - iQ_\theta = (Q_x - iQ_y)e^{i\theta} \end{cases} \quad (3.53)$$

将式(3.9)代入上式得到

$$\begin{cases} M_r + M_\theta = -2D(1 + \nu)[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \\ M_\theta - M_r + 2iM_{r\theta} = 2D(1 - \nu)[z\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{2i\theta} \\ Q_r - iQ_\theta = -4D\Phi'(z)e^{i\theta} \end{cases} \quad (3.54)$$

## 2. 边界条件的复变量表示

### (1) 自由边

自由边的边界条件已由式(2.30)给出。式(2.30)的第二个条件可以写为

$$Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \overline{V}_n(s) \quad (3.55)$$

其中  $s$  是边界曲线坐标。取边界上任一点为原点, 将上式对弧长  $s$  积分, 得到

$$p + M_{ns} = f(s) + C \quad (3.56)$$

其中  $C$  是积分常数

$$p = \int_0^s Q_n ds; \quad f(s) = \int_0^s \overline{V}_n ds \quad (3.57)$$

利用式(2.18), 边界条件(2.30)可以写为

$$\begin{cases} lM_x + 2lmM_{xy} + m^2M_y = \overline{M}_n(s) \\ -lmM_x + (l^2 - m^2)M_{xy} + lmM_y + p = f(s) + C \end{cases} \quad (3.58)$$

用  $l$  乘(3.58)第一式,  $m$  乘第二式后, 两式相减;  $m$  乘第一式,  $l$  乘第二式后, 两式相加。再注意到  $l = dy/ds, m = -dx/ds$ , 边界条件(3.58)能够改写为

$$\begin{cases} M_x dy - (M_{xy} - p)dx = \overline{M}_n(s)dy + (f + C)dx \\ (M_{xy} + p)dy - M_y dx = -\overline{M}_n dx + (f + C)dy \end{cases} \quad (3.59)$$

由式(2.20)和式(3.57)第一式得到

$$p = \int_0^s (Q_y dy - Q_x dx) \quad (3.60)$$

将式(3.3)和(3.4)的有关表达式代入式(3.59)和(3.60),经计算和整理,可以得到

$$\kappa\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f_1 + if_2 + iCz + C_1 \quad (3.61)$$

其中  $\kappa = -(3+\nu)/(1-\nu)$ ,  $C$  是实常数,  $C_1$  是复常数。根据式(3.25)型代换,对于一个单连通域,可以令  $C$  和  $C_1$  为零。在多连通域的不连通的边界上,  $C$  与  $C_1$  可以取不同的值,因此只能指定其中一条边界上  $C$  与  $C_1$  之值为零。 $C$  与  $C_1$  在其余边界上的常数值由解的唯一性条件确定。式(3.61)中  $f_1 + if_2$  的计算公式为

$$f_1 + if_2 = \frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s [\overline{M}_n(s) + i \int_0^s \overline{V}_n(s) ds] (dx + idy) \quad (3.62)$$

显然,对于外力为零的自由边界,  $f_1 + if_2$  为零,边界条件式(3.61)成为

$$\kappa\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = iCz + C_1 \quad (3.63)$$

## (2) 固支边

固支边的边界条件已由式(2.26)给出。根据复合函数的链式求导法则,可以写出

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \\ \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \end{cases} \quad (3.64)$$

设  $\theta$  是边界外法线  $n$  与  $x$  轴的夹角,并注意到

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial n} = \cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{\partial y}{\partial n} = -\sin\theta \quad (3.65)$$

式(3.64)可以写成为复数形式的关系式

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = \left( \frac{\partial w}{\partial n} + i \frac{\partial w}{\partial s} \right) e^{i\theta} \quad (3.66)$$

利用式(3.7)与式(3.66),固支边的边界条件(2.26)能够表示为

$$\varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = e^{i\theta} \left[ \overline{\alpha(s)} + i \frac{\partial \overline{w(s)}}{\partial s} \right] \quad (3.67)$$

### (3) 简支边

这类边界条件虽然也能由复变量表示,但只有个别学者进行了研究,很少应用。本书将不予介绍。

## § 3.4 运用保角变换方法求解孔口问题

对于无限单连通域,运用保角变换能够有效地求解各种复杂形状的孔口问题。它显示了复变函数解法的优越性。

### 1. 保角变换与曲线坐标

设关系式

$$z = \omega(\zeta) \quad (3.68)$$

把弹性板在  $z$  平面上所占区域  $S$  一一对应地映照到  $\zeta$  平面上的区域  $\Sigma$ , 其中  $\omega(\zeta)$  是  $\Sigma$  域内的单值解析函数。那么我们说式(3.68)确定了域  $S$  到域  $\Sigma$  的一个互为单值的保角变换。根据复变函数理论,若在域  $\Sigma$  中某点引两线素,那么在域  $S$  中就有夹角相同的两对应线素,且夹角的计量方向保持不变。在  $\zeta$  平面上命

$$\zeta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta} \quad (3.69)$$

则  $\rho$  和  $\theta$  就是  $\zeta$  点的极坐标。 $\zeta$  平面上一个圆周“ $\rho = \text{常数}$ ”和一条径向线“ $\theta = \text{常数}$ ”分别对应于  $z$  平面上的两条正交曲线。这两条曲线也可以用“ $\rho = \text{常数}, \theta = \text{常数}$ ”来表示(见图3.3)。

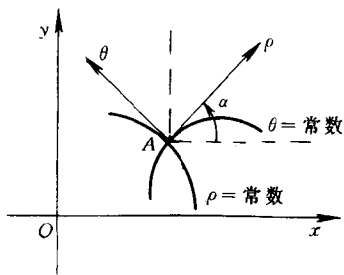


图3.3  $z$  平面上的曲线坐标  $(\rho, \theta)$

设  $z$  平面上, 过一点  $A$  的曲线坐标  $\rho$  和  $\theta$  相对于直角坐标  $x$  和  $y$  的转角为  $\alpha$ , 再设想  $A$  点沿  $\rho$  的方向有位移  $dz$ , 则在  $\zeta$  平面上对应点的位移  $d\zeta$  沿极坐标的径向方向, 于是有

$$dz = e^{i\alpha} |dz|, \quad d\zeta = e^{i\theta} |d\zeta| \quad (3.70)$$

可见

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\zeta}{\rho} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}, \quad e^{2i\alpha} = \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{\omega'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad (3.71)$$

现在对薄板弯曲的一些重要公式进行变换。把前面  $z$  的函数换上带下标 1 的符号, 然后变换为  $\zeta$  的函数

$$\begin{cases} \varphi_1(z) = \varphi_1[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta) \\ \psi_1(z) = \psi_1[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta) \end{cases} \quad (3.72)$$

$$\begin{cases} \varphi_1'(z) = \varphi_1'(\zeta)/\omega'(\zeta) = \Phi(\zeta) \\ \psi_1'(z) = \psi_1'(\zeta)/\omega'(\zeta) = \Psi(\zeta) \\ \varphi_1''(z) = \Phi'(\zeta)/\omega'(\zeta) \end{cases} \quad (3.73)$$

因为在  $z$  平面上, 曲线坐标  $\rho$  和  $\theta$  相对于直角坐标  $x$  和  $y$  的转角为  $\alpha$ , 参看 § 2.3, 容易得出

$$\begin{cases} M_\rho + M_\theta = M_x + M_y \\ M_\theta - M_\rho + 2iM_{\rho\theta} = (M_y - M_x + 2iM_{xy})e^{2i\alpha} \\ Q_\rho - iQ_\theta = (Q_x - iQ_y)e^{i\alpha} \end{cases} \quad (3.74)$$

将式(3.9)和式(3.71)代入式(3.74)得到

$$\begin{cases} M_\rho + M_\theta = -2D(1-\nu)[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}] \\ M_\theta - M_\rho + 2iM_{\rho\theta} = \frac{2D(1-\nu)\zeta^2}{\rho^2 \omega'(\zeta)} [\Phi'(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} + \Psi(\zeta)\omega'(\zeta)] \\ Q_\rho - iQ_\theta = -\frac{4D\zeta}{\rho|\omega'(\zeta)|} \Phi'(\zeta) \end{cases} \quad (3.75)$$

按同样的方式, 边界条件也可以变换到  $\zeta$  平面上。自由边边界条件式(3.61)变换为

$$\kappa\varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f_1 + if_2 + iC\omega(\zeta) + C_1 \quad (3.76)$$

其中右端项  $f_1 + if_2$  见式 (3.62)。

## 2. 无限板单孔口问题的一般解答

取映照函数 (3.68) 为有理函数

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + \sum_{k=0}^n C_k \zeta^k\right) \quad (3.77)$$

其中  $R$  为实数,  $C_k$  为复数, 且  $\sum_{k=0}^{\infty} |C_k| \leq 1$ 。式 (3.77) 可以以任意指定精度将单孔的无限平面映照到中心单位圆上。在大多数情况下, 级数取两三项便有足够的精度。在这种映照下, 公式 (3.37) 变换为

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{M_x^* + iM_y^*}{4D} \ln \zeta + \Gamma \omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta) \\ \psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{M_x^* - iM_y^*}{4D} \ln \zeta + \Gamma \omega(\zeta) + \psi_0(\zeta) \end{cases} \quad (3.78)$$

其中  $\varphi_0(\zeta)$  和  $\psi_0(\zeta)$  是在单位圆内解析并在边界上连续的函数。在边界上  $\rho=1, \zeta=e^{i\theta}$ 。引用记号

$$t = e^{i\theta} \quad (3.79)$$

将式 (3.78) 代入孔的边界条件 (3.76), 并注意  $iC$  和  $C_1$  可以取零及  $\bar{i}=1/t$ , 我们有

$$\kappa \varphi_0(t) + \frac{\omega(t)}{\bar{\omega}(t)} \overline{\varphi_0(t)} + \overline{\psi_0(t)} = f_0 \quad (3.80)$$

其中

$$\begin{aligned} f_0 = f_1 + if_2 + \frac{\kappa - 1}{2\pi i} \cdot \frac{M_x^* + iM_y^*}{4D} \ln t - (\kappa + 1) \Gamma \omega(t) - \\ \frac{\omega(t)}{\bar{\omega}(t)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \frac{M_x^* - iM_y^*}{4D} - \overline{\Gamma \omega(t)} \end{aligned} \quad (3.81)$$

在利用边界条件 (3.80) 决定函数  $\varphi_0(\zeta)$  及  $\psi_0(\zeta)$  之前, 先回顾两个 Cauchy 积分公式<sup>[13]</sup>:

① 设函数  $F(\zeta)$  在光滑闭围线  $L$  所围成的内域  $S^+$  (有限域) 内解析, 且在  $L$  上连续, 那么对于  $S^+$  内任意点  $\zeta$  都有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(t) dt}{t - \zeta} = F(\zeta) \quad (3.82)$$



② 设函数  $F(\zeta)$  在  $L$  的外域(无限域)解析,且在  $L$  上连续,那么对  $S^+$  内任意点  $\zeta$  都有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(t)dt}{t-\zeta} = F(\infty) \quad (3.83)$$

上两式中  $t$  是指  $L$  上的点,  $L$  沿顺时针方向(注意到  $x$  轴沿顺时针转  $90^\circ$  到达  $y$  轴)。

参见式(3.78),  $\varphi_0(\zeta)$  和  $\psi_0(\zeta)$  在单位圆内解析,在单位圆上连续,并由此推知,在单位圆上,  $\overline{\psi_0(t)}$  可以写为(已删去不影响应力的常数)

$$\overline{\psi_0(t)} = \overline{\beta_1 t} + \overline{\beta_2 t^2} + \dots = \overline{\beta_1}/t + \overline{\beta_2}/t^2 + \dots \quad (3.84)$$

其中  $\beta_k$  是复常数,  $\overline{\beta_1}/\zeta + \overline{\beta_2}/\zeta^2 + \dots$  在单位圆外解析,在单位圆上连续,在无限远为零。于是将边界条件式(3.80)两边乘以  $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{dt}{t-\zeta}$  后,沿单位圆  $L$  积分并利用 Cauchy 积分公式(3.82)和(3.83),可以得到

$$\kappa\varphi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{\omega(t)} \frac{\overline{\varphi_0(t)}}{t-\zeta} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f_0 dt}{t-\zeta} \quad (3.85)$$

将方程(3.80)两边换成共轭后按同样的方式处理,得到

$$\psi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega(t)}}{\omega(t)} \frac{\overline{\varphi_0(t)}}{t-\zeta} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{f_0} dt}{t-\zeta} \quad (3.86)$$

### 3. 含椭圆孔的无限板

下面以含椭圆孔的无限板弯曲为例来说明方程(3.85)和(3.86)的应用。

如图3.4(a),椭圆孔长轴为  $2a$ ,短轴为  $2b$ 。根据普通复变函数书籍知道,利用保角映照函数

$$z = \omega(\zeta) = R \left( \frac{1}{\zeta} + m\zeta \right) \quad (3.87)$$

可以将椭圆孔的外域映照到图3.4(b)所示单位圆的内域,其中  $A', B', C', D'$  分别是图3.4(a)中  $A, B, C, D$  的对应点。 $R$  和  $m$  是由  $a$  和  $b$  所决定的实数

$$R = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b} \quad (3.88)$$

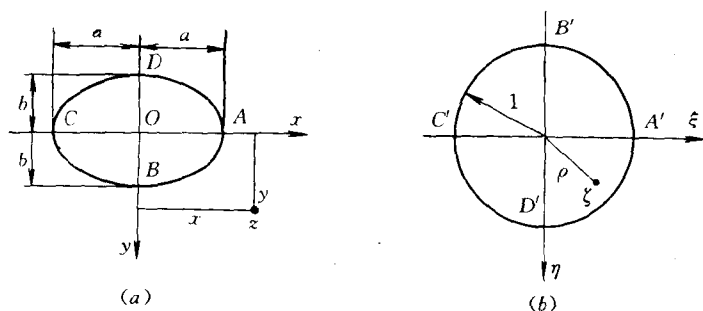


图3.4 带椭圆孔的无限域到单位圆内域的保角映照

注意到在单位圆上,  $\bar{t}=1/t$ , 可以得到

$$\frac{\omega(t)}{\omega'(t)} = -\frac{1}{t} \frac{mt^2 + 1}{t^2 - m} \quad (3.89)$$

$$\overline{\varphi'(t)} = \bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_2 \frac{1}{t} + 3\bar{\alpha}_3 \frac{1}{t^2} + \dots \quad (3.90)$$

其中  $\alpha_n$  是复常数。根据 Cauchy 积分公式(3.83), 可知方程(3.85)左边的积分式为零。

设椭圆孔边界无外力, 板仅在远处受均匀的弯矩和扭矩作用, 那么

$$f_1 + if_2 = 0, \quad M_x^* + iM_y^* = 0 \quad (3.91)$$

式(3.81)成为

$$f_0 = -(\kappa + 1)\Gamma R \left(\frac{1}{t} + mt\right) - \bar{\Gamma}' R \left(t + \frac{m}{t}\right) \quad (3.92)$$

将式(3.92)代入方程(3.85)并注意到此方程左端的积分项为零, 可以求得

$$\varphi_0(\zeta) = \left[ -\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)\Gamma R m - \frac{\bar{\Gamma}' R}{\kappa} \right] \zeta \quad (3.93)$$

将式(3.92)和(3.93)代入方程(3.86), 求得

$$\psi_0(\zeta) = \left[ \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)\Gamma R m + \frac{\bar{\Gamma}' R}{\kappa} \right] \frac{\zeta^3 + m\zeta}{m\zeta^2 - 1} - \left[ (\kappa + 1)\Gamma R + \bar{\Gamma}' R m \right] \zeta \quad (3.94)$$

将解答式(3.93)和式(3.94)代入式(3.78)并注意到此(3.91)

第二式,得到远处受均匀弯矩和扭矩作用的、含椭圆孔的无限板的问题的复变函数解答

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = \frac{\Gamma R}{\zeta} - \left( \frac{\Gamma R m}{\kappa} + \frac{\bar{\Gamma}' R}{\kappa} \right) \zeta \\ \psi(\zeta) = -(\kappa + 1) \Gamma R \zeta + \Gamma' R \frac{1}{\zeta} + \\ \quad \left[ \left( 1 + \frac{1}{\kappa} \right) \Gamma R m + \frac{\bar{\Gamma}' R}{\kappa} \right] \frac{\zeta^3 + m \zeta}{m \zeta^2 - 1} \end{cases} \quad (3.95)$$

将解答式(3.95)代入式(3.75),便可以求得板的内力。

### § 3.5 应力强度因子与函数 $\Phi(z)$ 的关系

#### 1. 远处均匀应力状态下板弯曲裂纹问题的解答

对于图3.4(a)所示的椭圆孔,如果令短轴  $b$  趋于零,则成为长  $2a$  的裂纹。此时式(3.88)成为

$$R = a/2 \quad m = 1 \quad (3.96)$$

于是解答(3.95)成为

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = \frac{\Gamma a}{2} \frac{1}{\zeta} - \frac{a}{2\kappa} (\Gamma + \bar{\Gamma}') \zeta \\ \psi(\zeta) = -\frac{(\kappa + 1) \Gamma a}{2} \zeta + \frac{a}{2} \Gamma' \frac{1}{\zeta} + \\ \quad \frac{a}{2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\kappa} \right) \Gamma + \frac{\bar{\Gamma}'}{\kappa} \right] \frac{\zeta^3 + \zeta}{\zeta^2 - 1} \end{cases} \quad (3.97)$$

为了更直观地研究裂纹尖端附近的应力应变场,将解答(3.97)变换为  $z$  的函数。将式(3.96)代入式(3.87),注意到  $z$  平面上的无穷远点对应于  $\zeta$  平面上的圆心,可以求得

$$\zeta = \frac{1}{a} (z - \sqrt{z^2 - a^2}) \quad (3.98)$$

其中根式所取单值枝使得

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \sqrt{z^2 - a^2} / z = 1 \quad (3.99)$$

将式(3.98)代入解答(3.97),得到在  $z$  平面上的解答

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1(z) = \varphi(\zeta) &= \frac{1}{2} \left( \Gamma - \frac{\Gamma}{\kappa} - \frac{\bar{\Gamma}'}{\kappa} \right) z + \\ &\quad \frac{1}{2} \left( \Gamma + \frac{\Gamma}{\kappa} + \frac{\bar{\Gamma}'}{\kappa} \right) \sqrt{z^2 - a^2} \\ \psi_1(z) = \psi(\zeta) &= \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa} - \kappa \right) \Gamma + \frac{1}{2} \Gamma' + \frac{\bar{\Gamma}'}{2\kappa} \right] z + \\ &\quad \frac{1}{2} \left[ \left( \kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \Gamma + \Gamma' - \frac{\bar{\Gamma}'}{\kappa} \right] \sqrt{z^2 - a^2} - \\ &\quad \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\kappa} \right) \Gamma + \frac{\bar{\Gamma}'}{\kappa} \right] \frac{a^2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \end{aligned} \right. \quad (3.100)$$

为了简单起见, 此后将略去  $\varphi_1(z)$  和  $\psi_1(z)$  的下标, 仍用  $\varphi(z)$  和  $\psi(z)$  表示。

将式(3.100)第一式求导得

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \left( \Gamma - \frac{\Gamma}{\kappa} - \frac{\bar{\Gamma}'}{\kappa} \right) + \frac{1}{2} \left( \Gamma + \frac{\Gamma}{\kappa} + \frac{\bar{\Gamma}'}{\kappa} \right) \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (3.101)$$

设裂纹尖端的坐标为  $z_1$  (在上式  $z_1 = \pm a$ ), 则可以看出, 在裂纹尖端附近的主奇异项为  $(z - z_1)^{-1/2}$ 。

## 2. 应力强度因子与函数 $\Phi(z)$ 的关系

在式(2.63)和(2.64)中取应力展开式的首项(主奇异项), 注意到式(2.50), 可以得到下述关系式

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= \frac{12\delta}{h^3} (M_r + M_\theta) = \\ &= -\frac{12(1+\nu)G\delta a_1}{(7+\nu)\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{12(1+\nu)G\delta b_1}{(5+3\nu)\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (3.102)$$

其中为避免与复变量混淆, 已将板的厚度坐标  $z$  换成  $\delta$ 。在板面  $\delta = \pm h/2$ 。将式(2.66)和(2.67)代入式(3.102), 可以得到板的应力和内力与经典板弯曲应力强度因子  $K_1$  和  $K_2$  之间的关系

$$\sigma_r + \sigma_\theta|_{\delta=h/2} = \frac{6}{h^2} (M_r + M_\theta) =$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}(1+\nu)}{3+\nu} \left[ \frac{K_1}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{K_2}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \right] \quad (3.103)$$

定义复应力强度因子  $K$

$$K = K_1 - iK_2 \quad (3.104)$$

以裂纹尖端点  $z_1$  为中心建立极坐标系  $(r, \theta)$ , 则在裂纹尖端附近有

$$z = z_1 + re^{i\theta} \quad (3.105)$$

于是由式(3.102)得到

$$M_r + M_\theta = \frac{(1+\nu)h^2}{3} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}(3+\nu)} \operatorname{Re} \left[ K \left( \frac{1}{z-z_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.106)$$

又从式(3.54)第一式

$$M_r + M_\theta = -4D(1+\nu) \operatorname{Re} [\Phi(z)] \quad (3.107)$$

从式(3.101)可以看到, 在裂纹尖端附近, 函数  $\Phi(z)$  的主奇异项为  $(z-z_1)^{-1/2}$ 。比较式(3.106)与(3.107), 可以得到复应力强度因子  $K$  与函数  $\Phi(z)$  之间的简单关系

$$K = -\frac{12\sqrt{2\pi}D(3+\nu)}{h^2} \lim_{z \rightarrow z_1} (z-z_1)^{1/2} \Phi(z) \quad (3.108)$$

### 3. 远处均匀应力状态下的弯曲裂纹尖端应力强度因子

为了求裂纹尖端  $z_1=a$  的应力强度因子, 将式(3.101)代入式(3.108), 并注意到  $\kappa = -(3+\nu)/(1-\nu)$ , 得到

$$K = -\frac{6D\sqrt{\pi a}}{h^2} [2(1+\nu)\Gamma - (1-\nu)\Gamma'] \quad (3.109)$$

下面具体计算如图3.5所示两种典型情况下的板弯曲应力强度因子。

①如图3.5(a), 远处受均匀弯矩  $M_y = M^\infty$ 。

由式(3.41)知道

$$\Gamma = -\frac{M^\infty}{4D(1+\nu)}, \quad \Gamma' = \frac{M^\infty}{2D(1-\nu)} \quad (3.110)$$

代入式(3.109)得到

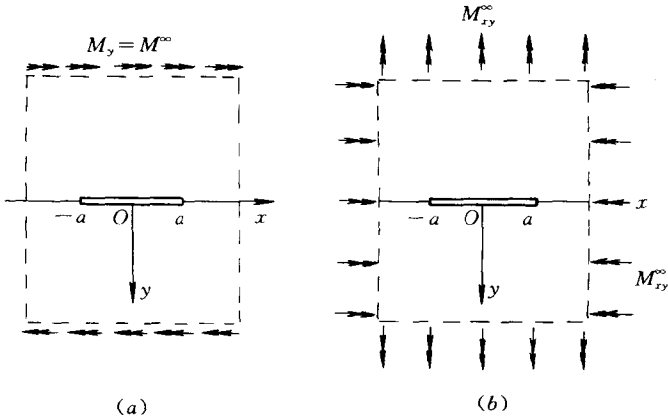


图3.5 两个典型的板弯曲裂纹问题

$$K = \frac{6\sqrt{\pi a}}{h^2} M^{\infty} \quad (3.111)$$

于是有

$$K_1 = \frac{6\sqrt{\pi a}}{h^2} M^{\infty}, \quad K_2 = 0 \quad (3.112)$$

②如图3.5(b), 远处受均匀扭矩  $M^{\infty}_{xy}$ 。

$$\Gamma = 0 \quad \Gamma' = \frac{iM^{\infty}_{xy}}{D(1-\nu)} \quad (3.113)$$

$$K_1 = 0 \quad K_2 = \frac{6\sqrt{\pi a}}{h^2} M^{\infty}_{xy} \quad (3.114)$$

### § 3.6 复变-主部分析法之应用简例

上节研究了一个简单的 Kirchhoff 板弯曲断裂问题。对于大量较为复杂的问题, 像在任意位置作用集中载荷的多条共直线或共圆弧裂纹问题, 复变-主部分析法更为简单有效。在介绍这个方法之前, 先引叙几个将用到的复变函数原理和定理<sup>[13.73]</sup>。

#### 1. 镜象对称原理及两个相关定理

(1) 关于实轴的对称原理

设  $F(z)$  为定义在复平面某区域  $S$  的可能有有限个极点的解

析函数, 点 $\bar{z}$ 为点 $z$ 对实轴的镜象, 域 $\bar{S}$ 为 $S$ 关于实轴的镜象(见图 3.6)。定义

$$\bar{F}(z) = \overline{F(\bar{z})} \quad (3.115)$$

那么 $\bar{F}(z)$ 在 $\bar{S}$ 将与 $F(z)$ 在 $S$ 具有同样的性质, 并且 $\bar{F}(z)$ 的极点就是 $F(z)$ 的极点对实轴的镜象。若 $F(z)$ 定义于下半平面 $S^+$ , 在实轴上存在边界值 $F^+(t)$ , 其中 $t$ 为实轴上的点, 那么 $\bar{F}(z)$ 定义于上半平面 $S^-$ , 在实轴上一定存在边界值 $\bar{F}^-(t)$ , 并且

$$\bar{F}^-(t) = \overline{F^+(t)} \quad (3.116)$$

显然, 二者的位置可以对调

$$\bar{F}^+(t) = \overline{F^-(t)} \quad (3.117)$$

(2) 关于半径为 $R$ 的圆周

设 $F(z)$ 的定义域 $\Sigma^+$ 在半径为 $R$ 的圆内, 除有限个极点外解析。点 $z' = R^2/\bar{z}$ 是点 $z$ 关于圆周的反射点,  $\Sigma^-$ 是 $\Sigma^+$ 的反射域(见图 3.7)。定义

$$F_*(z) = \bar{F}(R^2/\bar{z}) = \overline{F(R^2/\bar{z})} \quad (3.118)$$

那么 $F_*(z)$ 在 $\Sigma^-$ 将与 $F(z)$ 在 $\Sigma^+$ 具有同样的性质, 并且 $F_*(z)$ 的极点就是 $F(z)$ 的极点对圆周的反射点。若 $F(z)$ 在圆周上有边值

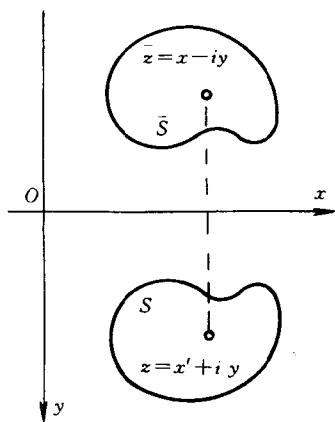


图 3.6 关于实轴的镜象对称域

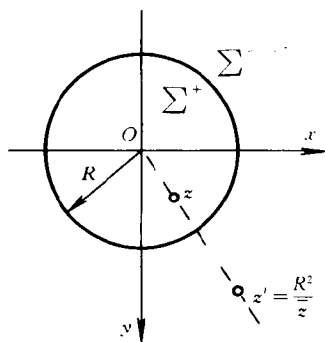


图 3.7 关于圆周的反射点

$F^+(t)$ , 其中  $t$  为圆周上的点, 则边界值  $F^-(t)$  也存在, 且

$$F^-(t) = \overline{F^+(t)} \quad (3.119)$$

显然也可以对调上式二者的位置。

与上述原理相关的, 有两个关于解析延拓的定理:

定理一 设域  $S$  的边界一部分  $L$  在实轴上,  $S'$  与  $S$  关于实轴对称。又设函数  $F(z)$  和  $G(z)$  均在域  $S$  内解析, 在  $S+L$  上连续, 且在  $L$  上满足

$$F(t) = \overline{G(t)} \quad (3.120)$$

那么  $F(z)$  和  $G(z)$  都可以越过  $L$  解析开拓到  $S'$ , 且在  $S'$

$$F(z) = \overline{G(z)}, \quad G(z) = \overline{F(z)} \quad (3.121)$$

定理二 设域  $S$  的边界一部分  $L$  是半径为  $R$  的圆周的一段弧,  $S'$  与  $S$  关于此圆周对称。又设函数  $F(z)$  和  $G(z)$  均在域  $S$  内解析, 在  $S+L$  上连续, 且在  $L$  上满足

$$F(t) = \overline{G(t)} \quad (3.122)$$

那么  $F(z)$  和  $G(z)$  都可以越过  $L$  解析开拓到  $S'$ , 且在  $S'$

$$F(z) = \overline{G(R^2/z)}, \quad G(z) = \overline{F(R^2/z)} \quad (3.123)$$

## 2. 复变-主部分析法的两个应用简例

下面通过两个例子来说明复变-主部分析法。

例1 如图3.8所示, 半无限板内一点  $z_0$  处作用集中弯矩  $M_x^*$  和  $M_y^*$ , 板在远处的内力为零。

这个看似简单的问题由于需要同时处理在载荷点解的奇异性

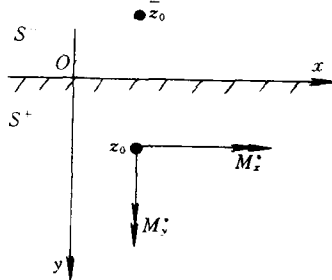


图3.8 任意位置作用集中弯矩的半无限板



与自由边界条件而变得复杂起来。复变-主部分析法采取各个击破的原则,以简化求解过程。

首先研究解的奇异性主部,它仅与集中载荷的性质有关,而与自由边的边界条件无关。为此考虑无限板。令 § 3.2 中所研究的单孔无限板的孔边作用的合弯矩保持不变而孔收缩于原点,即成为无限板在原点作用集中弯矩  $M_x^*$  和  $M_y^*$  的问题。由于已假定远处应力为零,这个问题的解可以令式(3.39)中  $\Gamma = \Gamma' = 0$  而得到

$$\Phi(z) = \frac{M}{z} + \Phi_0(z), \quad \Psi(z) = \frac{\bar{M}}{z} + \Psi_0(z) \quad (3.124)$$

其中

$$M = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{M_x^* + iM_y^*}{4D} = \frac{M_y^* - iM_x^*}{8\pi D} \quad (3.125)$$

$\Phi_0(z)$  和  $\Psi_0(z)$  在全平面解析,在无穷远为零。根据 Liouville 定理,它们恒等于零。于是无限板在原点作用集中弯矩  $M_x^*$  和  $M_y^*$  的问题的解答为

$$\Phi(z) = \frac{M}{z}, \quad \Psi(z) = \frac{\bar{M}}{z} \quad (3.126)$$

根据坐标平移公式(3.47)和(3.49),无限板在任意点  $z_0$  作用集中弯矩  $M_x^*$  和  $M_y^*$  的问题的复变函数解答为

$$\Phi(z) = \frac{M}{z - z_0}, \quad \Psi(z) = \frac{\bar{M}}{z - z_0} + \frac{M \bar{z}_0}{(z - z_0)^2} \quad (3.127)$$

对于图3.8中的半无限板,定义在下半平面  $S^+$  的函数  $\Phi(z)$  和  $\Psi(z)$  在  $z_0$  处有与式(3.127)的函数相同的奇性主部,于是可写出

$$\begin{cases} \Phi(z) = \frac{M}{z - z_0} + \Phi_0(z) \\ \Psi(z) = \frac{\bar{M}}{z - z_0} + \frac{M \bar{z}_0}{(z - z_0)^2} + \Psi_0(z) \end{cases} \quad z \in S^+ \quad (3.128)$$

其中  $\Phi_0(z)$  和  $\Psi_0(z)$  在  $S^+$  解析,在无穷远为零。

板只有一条边界,且边界上无外力作用,边界条件(3.61)的右端项为零。将方程(3.61)求导得到

$$\kappa\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi(t)} + \overline{\Psi(t)} = 0 \quad (3.129)$$

其中  $t$  表示实轴上的点,  $\kappa = -(3+\nu)/(1-\nu)$ 。上式又可写为

$$\Phi(t) = -\frac{1}{\kappa}[\overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi(t)} + \overline{\Psi(t)}] \quad (3.130)$$

根据关于解析延拓的定理一,  $\Phi(z)$  能够越过实轴延拓到上半平面  $S^-$ , 并且在  $S^-$

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\kappa}[\overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}] \quad z \in S^- \quad (3.131)$$

根据关于实轴的镜象对称原理, 知  $\Phi(z)$  在上半平面有极点  $\bar{z}_0$ , 其主部可以由  $\Phi(z)$  和  $\Psi(z)$  在下半平面的极点  $z_0$  处的主部通过式(3.131)确定。最后在全平面能够写出

$$\Phi(z) = \frac{M}{z - z_0} - \frac{M}{\kappa(z - \bar{z}_0)} - \frac{\bar{M}(z_0 - \bar{z}_0)}{\kappa(z - \bar{z}_0)^2} + \Phi_0^*(z) \quad (3.132)$$

其中  $\Phi_0^*(z)$  在全平面解析, 在无穷远为零。根据 Liouville 定理, 知其恒为零。式(3.132)成为

$$\Phi(z) = \frac{M}{z - z_0} - \frac{M}{\kappa(z - \bar{z}_0)} - \frac{\bar{M}(z_0 - \bar{z}_0)}{\kappa(z - \bar{z}_0)^2} \quad (3.133)$$

又由式(3.131)

$$\Psi(z) = -\kappa\overline{\Phi(z)} - \Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} \quad z \in S^+ \quad (3.134)$$

将式(3.133)代入式(3.134)得

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & -\frac{\kappa\bar{M}}{z - \bar{z}_0} + \frac{\bar{M}}{z - z_0} + \frac{M\bar{z}_0}{(z - z_0)^2} - \frac{M\bar{z}_0}{\kappa(z - \bar{z}_0)^2} - \\ & \frac{\bar{M}(z_0 - \bar{z}_0)}{\kappa(z - \bar{z}_0)^2} - \frac{2M(z_0 - \bar{z}_0)\bar{z}_0}{\kappa(z - z_0)^3} \end{aligned} \quad (3.135)$$

有了复函数  $\Phi(z)$  和  $\Psi(z)$  的解答(3.133)和(3.135), 就易于由式(3.9)计算板的内力, 由式(2.13)和(2.14)计算板的应力。可以看出, 由于利用简单问题(全平面的问题)的解答首先确定了函数  $\Phi(z)$  和  $\Psi(z)$  在其定义域的主部, 并充分利用了复变函数的解析延拓这一工具, 就使一个较为复杂的问题简捷地得到了解答。

例2 如图3.9所示,含半径为  $R$  的圆孔的无限板内一点  $z_0$  处作用弯矩  $M_x^*$  和  $M_y^*$ ,无穷远应力为零。

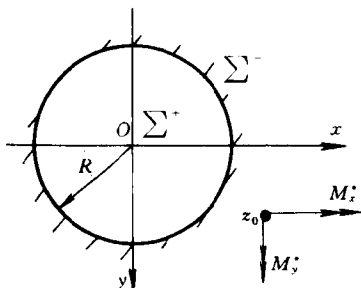


图3.9 圆孔邻近作用集中弯矩的无限板

参看 § 3.3 的坐标变换,并注意到极坐标下  $e^{-2i\theta} = \bar{z}/z$ ,可写出与直线自由边边界条件(3.129)相对应的圆孔的边界条件为

$$\kappa\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - \bar{t}\Phi'(t) - \frac{\bar{t}}{t}\overline{\Psi'(t)} = 0 \quad (3.136)$$

$$\text{或} \quad \Phi(t) = -\frac{1}{\kappa} \left[ \overline{\Phi(t)} - \bar{t}\Phi'(t) - \frac{\bar{t}^2}{R^2}\overline{\Psi'(t)} \right] \quad (3.137)$$

于是根据关于解析延拓的定理二,定义在孔外域  $\Sigma^-$  的函数  $\Phi(z)$  能够越过圆孔周界解析延拓到孔的内域  $\Sigma^+$ ,并且在  $\Sigma^+$

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\kappa} \left[ \overline{\Phi\left(\frac{R^2}{z}\right)} - \frac{R^2}{z}\overline{\Phi'\left(\frac{R^2}{z}\right)} - \frac{R^2}{z^2}\overline{\left(\frac{R^2}{z}\right)} \right] \quad z \in \Sigma^+ \quad (3.138)$$

在孔的外域  $\Sigma^-$ ,函数  $\Phi(z)$  和  $\Psi(z)$  的主部已由式(3.127)给出。利用式(3.138),可以知道  $\Phi(z)$  在域  $\Sigma^+$  有两个极点  $z=0$  与  $z=z^*$  并确定其主部,其中

$$z^* = R^2/\bar{z}_0 \quad (3.139)$$

于是根据 Liouville 定理

$$\Phi(z) = \frac{M}{z-z_0} - \frac{M}{\kappa(z-z^*)} + \frac{M}{\kappa z} - \frac{\overline{M}z^*(z_0-z^*)}{\kappa\bar{z}_0(z-z^*)^2} \quad (3.140)$$

再利用式(3.138),能够求得  $\Psi(z)$ 。这一工作留给读者自己

完成。

### § 3.7 共直线裂纹问题的一般解答

本章后几节将采用复变-主部分分析法对含裂纹 Kirchhoff 板进行研究,同时也将讨论诸如不同裂纹间复函数  $\Phi(z)$  的虚常数  $iC$  之值跳跃的物理意义与此常数之确定方法等重要理论问题。

#### 1. 共直线裂纹问题的描述

如图 3.10 所示,无限弹性板的实轴  $x$  上有一系列共线裂纹  $L_j$ ,裂纹端点分别为  $a_j$  和  $b_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ )。设  $L$  是  $L_j$  的整体, $L'$  是实轴上未开裂的部分。集中弯矩  $M_x^*$  和  $M_y^*$  作用在板内任意点  $z_0$ 。无穷远为均匀应力状态,已给定无穷远弯矩  $M_x^\infty, M_y^\infty$  和扭矩  $M_{xy}^\infty$ ,或者等价地给定无穷远主弯矩  $M_1^\infty$  和  $M_2^\infty$  及  $M_1^\infty$  的主面外法线与  $x$  轴的夹角  $\alpha$ 。

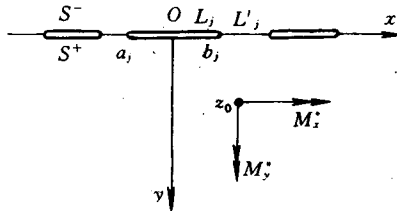


图 3.10 含共直线裂纹的无限弹性板

自由边的边界条件的复函数表示已由方程(3.61)给出。将方程(3.61)两边求导并注意到式(3.62),可以得到

$$\kappa\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = \frac{1}{D(1-\nu)} \times [m(t) + if(t)] + iC \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.141)$$

其中

$$m(t) = \overline{M}_n(t), \quad f(t) = \int_0^t \overline{Q}_n(t)dt + \overline{M}_{nt}(t) \quad (3.142)$$

$t$  代表实轴上的点。 $m(t)$  和  $f(t)$  的物理意义分别是裂纹面单位长度上的弯矩和等效扭矩。设裂纹面无外载作用,则它们为零。于是

裂纹面的边界条件可以写为

$$[m(t) + if(t)]^+ = [m(t) + if(t)]^- = 0 \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.143)$$

其中上标+、-号分别表示从下半平面和上半平面趋于实轴的函数值。

在方程(3.141)右端,还有一个虚常数  $iC$ ,它们在各条裂纹上可以取不同的值

$$iC(t) = \begin{cases} iC_1^* & \text{在 } L_1 \\ iC_2^* & \text{在 } L_2 \\ \dots & \\ iC_n^* & \text{在 } L_n \end{cases} \quad (3.144)$$

其中  $C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*$  为实常数。为了研究不同裂纹之间,  $iC(t)$  作为虚常数跳跃的物理意义,考察第  $k$  和  $k+1$  条裂纹。方程(3.141)右端的虚部包含两项:  $if(t)/[D(1-\nu)]$  和  $iC$ 。裂纹面无外载,  $f(t)$  在两裂纹面之值均为零,但  $iC$  却可能有  $i(C_{k+1}^* - C_k^*)$  的跳跃。换一种方式考察这个问题:设想沿实轴将此两裂纹间韧带剪开,两裂纹连成一条裂纹,  $iC$  应当保持常数,但由于剪开面可能有剪力  $Q_y$  作用,由式(3.142)第二式,  $f(t)$  在通过这段假想裂纹面后可能取得一个增量(在实际两裂纹面间的值出现跳跃)。后一种考察方式并没有改变问题的物理性质,方程(3.141)右端两项  $if(t)/[D(1-\nu)]$  和  $iC$  之和应当保持不变,这就确定了  $iC$  之值的跳跃与两裂纹间韧带上横向剪力的合力之间的定量关系

$$C_{k+1}^* - C_k^* = \frac{1}{D(1-\nu)} \int_{b_k}^{a_{k+1}} Q_y dx \quad (3.145)$$

对于多连通域的应力边值问题,为了确定问题的通解中的常数,必须利用裂纹面的位移单值条件

$$\begin{aligned} [u(b_j) + iv(b_j)]^+ - [u(a_j) + iv(a_j)]^+ = \\ [u(b_j) + iv(b_j)]^- - [u(a_j) + iv(a_j)]^- \\ j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.146)$$

设

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.147)$$

位移单值条件(3.146)还可以写成

$$\int_{a_j}^{b_j} [u'(t) + iv'(t)]^+ dt = \int_{a_j}^{b_j} [u'(t) + iv'(t)]^- dt$$

$$j = 1, 2, \dots, n \quad (3.148)$$

此外,对于含两共线半无限裂纹的无限板(双边裂纹板的理想模型),还必须给出静力学补充条件。如图3.11,设下半板对上半板作用的内力的合力矩分量为  $M_x^R$  和  $M_y^R$ ,合剪力为  $V^R$ ,则有

$$\int_{L'} [m(t) + if(t)] dt = - (M_x^R + iM_y^R) \quad (3.149)$$

$$\int_{L'} V(t) dt = V^R \quad (3.150)$$

由每个半板的静力平衡方程可知,条件(3.149)和(3.150)等价于给出每个半板在远处载荷的主矢和主矩。

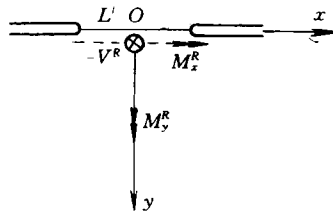


图3.11 两半板连接韧带上内力的合力

## 2. 分析与解答

参看 § 3.6 中例1,对于图3.10中的问题,根据对复函数  $\Phi(z)$  和  $\Psi(z)$  的奇性主部分析,可以知道它们仅在  $z_0$  处有极点,可以表示为

$$\begin{cases} \Phi(z) = \frac{M}{z - z_0} + \Gamma + \Phi_0(z) \\ \Psi(z) = \frac{\bar{M}}{z - z_0} + \frac{M \bar{z}_0}{(z - z_0)^2} + \Gamma' + \Psi_0(z) \end{cases} \quad (3.151)$$

其中  $M$  已由式(3.125)给出,  $\Gamma$  和  $\Gamma'$  刻画无穷远内力状态,已由

式(3.41)和(3.42)给出 $\Phi_0(z)$ 和 $\Psi_0(z)$ 在沿 $L$ 割开的平面内解析,在无穷远为零。

根据镜像对称原理(参看式(3.115)),引进一个新的解析函数

$$\Omega(z) = \overline{\Phi}(z) + z \overline{\Phi}'(z) + \overline{\Psi}(z) \quad (3.152)$$

将式(3.151)代入式(3.152),分离出奇性主部,则 $\Omega(z)$ 可以写为

$$\Omega(z) = \frac{M}{z - z_0} + \frac{\overline{M}(z_0 - \overline{z_0})}{(z - z_0)^2} + \Gamma + \overline{\Gamma}' + \Omega_0(z) \quad (3.153)$$

其中 $\Omega_0(z)$ 在沿 $L$ 割开的平面内解析,在无穷远为零。

利用式(3.152),也可以由 $\Phi(z)$ 和 $\Omega(z)$ 表示 $\Psi(z)$

$$\Psi(z) = \overline{\Omega}(z) - \Phi(z) - z\Phi'(z) \quad (3.154)$$

将式(3.154)代入式(3.141),然后代入边界条件(3.143),得到

$$\kappa\Phi^+(t) + \Omega^-(t) = iC \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.155)$$

$$\kappa\Phi^-(t) + \Omega^+(t) = iC \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.156)$$

其中 $iC$ 见式(3.144),为在每个裂纹面可以有不同数值的虚常数。根据函数 $\Phi(z)$ 的一个虚常数选择的随意性,可以设在一条裂纹上的 $iC$ 值等于零,例如设

$$C_1^* = 0 \quad (3.157)$$

将方程(3.155)和(3.156)相加与相减,可以得到

$$[\kappa\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\kappa\Phi(t) + \Omega(t)]^- = 2iC \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.158)$$

$$[\kappa\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\kappa\Phi(t) - \Omega(t)]^- = 0 \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.159)$$

将式(3.151)第一式和式(3.153)代入方程(3.159)得到

$$[\kappa\Phi_0(t) - \Omega_0(t)]^+ - [\kappa\Phi_0(t) - \Omega_0(t)]^- = 0 \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.160)$$

于是根据 Liouville 定理,在全平面上有

$$\kappa\Phi_0(z) - \Omega_0(z) = 0 \quad (3.161)$$

将式(3.151)第一式、式(3.153)和(3.161)代入方程(3.158), 得到

$$\Phi_0^+(t) + \Phi_0^-(t) = F(t) \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.162)$$

其中

$$F(t) = -\frac{M}{t - z_0} - \frac{M}{\kappa(t - \bar{z}_0)} - \frac{\bar{M}(z_0 - \bar{z}_0)}{\kappa(t - \bar{z}_0)^2} - \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)\Gamma - \frac{1}{\kappa}\bar{\Gamma}' + \frac{2iC}{\kappa} \quad (3.163)$$

根据文献[13], 函数方程(3.162)的通解能够写为

$$\Phi_0(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{F(t)}{X_0^+(t)} \cdot \frac{dt}{t - z} + X_0(z)P(z) \quad (3.164)$$

其中

$$X_0(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{-1/2} (z - b_j)^{-1/2} \quad (3.165)$$

在沿  $L$  割开的平面上,  $X_0(z)$  所取的单值枝使得

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n X_0(z) = 1 \quad (3.166)$$

$P(z)$  是一个任意  $(n-1)$  次多项式

$$P(z) = C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \cdots + C_n \quad (3.167)$$

可以看出, 在通解(3.164)中共含有  $n$  个复常数  $C_1, C_2, \dots, C_n$  和  $n$  个实常数  $C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*$ 。对于有限长裂纹问题, 由位移单值条件(3.148)可得出  $n$  个复数代数方程, 方程(3.145)包含  $(n-1)$  个实代数方程, 连同方程(3.157), 可以完全确定这些待定常数。对于含两共线半无限裂纹问题, 由于半无限裂纹上下裂纹面在无穷远不连接, 位移单值条件式(3.148)中将少一个方程。此外在利用关系式(3.145)时, 两半板全部连接切带上的合剪力也必须给定, 这就需要用到静力学补充条件式(3.149)和(3.150)。关于这个问题的详细讨论可参看文献[17, 18, 21]和 § 4.5。

为了应用的方便, 下面将位移单值条件式(3.148)化为复函数  $\Phi_0(z)$  的方程。

将式(3.154)代入式(3.10), 然后代入位移单值条件式



(3.148), 得到

$$\int_{a_j}^{b_j} [\Phi^+(t) + \Omega^-(t)] dt = \int_{a_j}^{b_j} [\Phi^-(t) + \Omega^+(t)] dt$$

$$j = 1, 2, \dots, n \quad (3.168)$$

它可以化为围道积分

$$\oint_{\Delta_j} [\Phi(z) - \Omega(z)] dz = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.169)$$

其中  $\Delta_j (j=1, 2, \dots, n)$  为包围各条裂纹的闭围道, 极点  $z_0$  和  $\bar{z}_0$  在围道外。将式(3.151)第一式和式(3.153)代入方程(3.169), 位移单值条件的方程进一步简化为

$$\oint_{\Delta_j} \Phi_0(z) dz = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.170)$$

对于仅含有有限长裂纹的无限板(不包括两共线半无限裂纹板), 根据式(3.39)第一式

$$\Phi(z) = \Gamma + \frac{M}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (3.171)$$

而从式(3.151)第一式和式(3.164)

$$\Phi(z) = \Gamma + \frac{M + C_1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (3.172)$$

比较以上两式立即得出

$$C_1 = 0 \quad (3.173)$$

显然, 式(3.173)能够代替一个复数形式的位移单值条件。对于一条有限长裂纹问题, 利用式(3.157)和(3.173)就能确定通解中的待定常数, 不必直接利用位移单值条件。事实上, 这是一个无限单连通域的问题。

### § 3.8 典型弯曲裂纹问题的解答及 弯曲应力强度因子公式

本节将通过求解一系列典型弯曲裂纹问题来说明通解(3.164)的应用。

例1 无限板内有一条从 $-a$ 到 $a$ 的中心裂纹,在任意点 $z_0$ 处作用集中弯矩 $M_x^*$ 和 $M_y^*$ 。无穷远为均匀应力状态。

注意到式(3.157)和(3.173),通解(3.164)化为

$$\Phi_0(z) = I(z)X_0(z) \quad (3.174)$$

其中

$$X_0(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (3.175)$$

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{F(t)}{X_0^+(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} \quad (3.176)$$

在由式(3.163)给出的 $F(t)$ 中,虚常数 $iC$ 等于零。

注意到在上下裂纹面

$$X_0^+(t) = -X_0^-(t) \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.177)$$

可以将 $I(z)$ 化为一个围道积分

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{F(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{t-z} - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{F(t)}{X^-(t)} \frac{dt}{t-z} \right] = \\ &\quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F(t)}{X_0(t)} \frac{dt}{t-z} \end{aligned} \quad (3.178)$$

其中 $\Lambda$ 是一个包围裂纹 $L$ 的逆时针方向的闭围道, $F(z)$ 的极点 $z_0$ 和 $\bar{z}_0$ 在 $\Lambda$ 外。

根据对无穷域的Cauchy积分公式<sup>[13]</sup>,可以求得

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{2X_0(z)} \left[ -\frac{M}{z-z_0} - \frac{M}{\kappa(z-\bar{z}_0)} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\bar{M}(z_0-\bar{z}_0)}{\kappa(z-\bar{z}_0)^2} - \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)\Gamma - \frac{1}{\kappa}\bar{\Gamma}' \right] + \\ &\quad \frac{1}{2X_0(z_0)} \cdot \frac{M}{z-z_0} + \frac{1}{2X_0(\bar{z}_0)} \left[ \frac{M}{\kappa(z-\bar{z}_0)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\bar{M}(z_0-\bar{z}_0)}{\kappa(z-\bar{z}_0)} \left( \frac{1}{z-\bar{z}_0} + \frac{\bar{z}_0}{z_0^2-a^2} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)M + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left[ \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)\Gamma + \frac{1}{\kappa}\bar{\Gamma}' \right] z \right] \end{aligned} \quad (3.179)$$

于是从式(3.151)、(3.153)、(3.161)、(3.174)和(3.179),可以写出函数 $\Phi(z)$ 和 $\Omega(z)$ 的解答

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \frac{1}{2} \left[ \frac{M}{z - z_0} - \frac{M}{\kappa(z - \bar{z}_0)} - \right. \\ & \left. \frac{\bar{M}(z_0 - \bar{z}_0)}{\kappa(z - \bar{z}_0)^2} + (1 - \frac{1}{\kappa})\Gamma - \frac{1}{\kappa}\bar{\Gamma}' \right] + \\ & \frac{X_0(z)}{2X_0(z_0)} \cdot \frac{M}{z - z_0} + \frac{X_0(z)}{2X_0(\bar{z}_0)} \left[ \frac{M}{\kappa(z - \bar{z}_0)} + \frac{\bar{M}(z_0 - \bar{z}_0)}{\kappa(z - \bar{z}_0)} \cdot \right. \\ & \left. \left( \frac{1}{z - \bar{z}_0} + \frac{\bar{z}_0}{z_0^2 - a^2} \right) \right] + \frac{X_0(z)}{2} \left\{ (1 + \frac{1}{\kappa})M + \right. \\ & \left. \left[ (1 + \frac{1}{\kappa})\Gamma + \frac{1}{\kappa}\bar{\Gamma}' \right] z \right\} \quad (3.180) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega(z) = & \frac{1}{2} \left[ -\frac{\kappa M}{z - z_0} + \frac{M}{z - \bar{z}_0} + \right. \\ & \left. \frac{\bar{M}(z_0 - \bar{z}_0)}{(z - \bar{z}_0)^2} + (1 - \kappa)\Gamma + \bar{\Gamma}' \right] + \\ & \frac{\kappa X_0(z)}{2X_0(z_0)} \cdot \frac{M}{z - z_0} + \frac{X_0(z)}{2X_0(\bar{z}_0)} \left[ \frac{M}{z - \bar{z}_0} + \frac{\bar{M}(z_0 - \bar{z}_0)}{z - \bar{z}_0} \cdot \right. \\ & \left. \left( \frac{1}{z - \bar{z}_0} + \frac{\bar{z}_0}{z_0^2 - a^2} \right) \right] + \frac{X_0(z)}{2} \left\{ (1 + \kappa)M + \right. \\ & \left. [(1 + \kappa)\Gamma + \bar{\Gamma}'] z \right\} \quad (3.181) \end{aligned}$$

下面讨论解答式(3.180)和(3.181)的若干特殊情形,以得出一些实际重要问题的解答,同时给出作为断裂力学重要参数的应力强度因子公式。

①板内无集中载荷,无穷远为均匀应力状态。显然,只要令 $M=0$ ,解答式(3.180)和(3.181)就退化为此特殊情形的解答

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{\kappa})\Gamma - \frac{1}{2\kappa}\bar{\Gamma}' + \\ & \frac{1}{2} \left[ (1 + \frac{1}{\kappa})\Gamma + \frac{1}{\kappa}\bar{\Gamma}' \right] \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (3.182) \end{aligned}$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2}[(1 - \kappa)\Gamma + \bar{\Gamma}] + \frac{1}{2}[(1 + \kappa)\Gamma + \bar{\Gamma}'] \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (3.183)$$

将上两式代入式(3.154)得到

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa} - \kappa \right) \Gamma + \frac{1}{2} \Gamma' + \frac{1}{2\kappa} \bar{\Gamma}' + \\ &\quad \left[ \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{1}{\kappa} \right) + \frac{\Gamma'}{2} - \frac{1}{2\kappa} \right] \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \\ &\quad \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\kappa} \right) \Gamma + \frac{1}{\kappa} \Gamma' \right] \frac{a^2 z}{\sqrt{(z^2 - a^2)^3}} \end{aligned} \quad (3.184)$$

将式(3.100)对  $z$  求导,可知结果完全与解答式(3.182)和(3.184)吻合。由此可见,解答式(3.100)仅是解答式(3.180)和(3.181)的一个简单的特殊情形。此种特殊情形的复应力强度因子已由式(3.109)给出,图3.5所示两种典型情况的应力强度因子也已由式(3.112)和(3.114)给出。这里不再重复。

②见图3.12,裂纹邻近任一点  $z_0$  作用集中弯矩  $M_x^*$  和  $M_y^*$ ,无穷远应力为零。

在这种情况下,  $\Gamma = \Gamma' = 0$ ,解答式(3.180)成为

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{M}{z - z_0} - \frac{M}{\kappa(z - \bar{z}_0)} - \frac{\bar{M}(z_0 - \bar{z}_0)}{\kappa(z - \bar{z}_0)^2} \right] + \\ &\quad \frac{X_0(z)}{2X_0(z_0)} \cdot \frac{M}{z - z_0} + \frac{X_0(z)}{2X_0(\bar{z}_0)} \left[ \frac{M}{\kappa(z - \bar{z}_0)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\bar{M}(z_0 - \bar{z}_0)}{\kappa(z - \bar{z}_0)} \left( \frac{1}{z - z_0} + \frac{\bar{z}_0}{z_0^2 - a^2} \right) \right] + \\ &\quad \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\kappa} \right) M X_0(z) \end{aligned} \quad (3.185)$$

注意到  $M$  已由式(3.125)给出,将上式代入计算复应力强度因子的公式(3.108),并令  $z_1 = a$ ,得到在裂纹尖端  $a$  的复应力强度因子公式

$$\begin{aligned}
 K_1 - iK_2 &= \frac{3(3 + \nu)}{4 \sqrt{\pi} h^2 \sqrt{a}} \left\{ \sqrt{\frac{z_0 + a}{z_0 - a}} - \sqrt{\frac{\bar{z}_0 + a}{\bar{z}_0 - a}} \cdot \frac{1 - \nu}{3 + \nu} \right\} \\
 (M_y^* - iM_x^*) &= \frac{3(1 - \nu)y_0 \sqrt{a}}{2 \sqrt{\pi} h^2} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 - a^2}(\bar{z}_0 - a)} \\
 (M_x^* - iM_y^*) &= \frac{3(1 + \nu)}{2 \sqrt{\pi} h^2 \sqrt{a}} (M_y^* - iM_x^*) \quad (3.186)
 \end{aligned}$$

在实际应用中,需要分离式(3.186)右边项的实部和虚部。将式中有关项化成指数形式较为方便,因为在这种形式下容易利用 Euler 公式  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$  进行实部和虚部的分离。为此将式(3.186)化为

$$\begin{aligned}
 K_1 - iK_2 &= \left\{ \frac{3(3 + \nu)}{4 \sqrt{\pi} h^2 \sqrt{a}} \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \right. \\
 &\quad \left[ e^{(i\theta_B - \theta_A)/2} - \frac{1 - \nu}{3 + \nu} e^{(i\theta_A - \theta_B)/2} \right] - \\
 &\quad \left. \frac{3(1 + \nu)}{2 \sqrt{\pi} h^2 \sqrt{a}} \right\} (M_y^* - iM_x^*) - \frac{3(1 - \nu)y_0 \sqrt{a}}{2 \sqrt{\pi} h^2 \sqrt{r_A r_B r_A}} \\
 &\quad e^{(3\theta_A + \theta_B)i/2} (M_x^* - iM_y^*) \quad (3.187)
 \end{aligned}$$

式中各几何量的意义见图3.12。

一般位置作用集中弯矩的应力强度因子公式(3.187)是一个

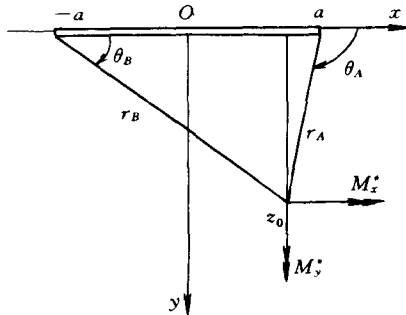


图3.12 裂纹邻近一点作用集中弯矩

很有用的新结果,能够用来计算各种加载情形的应力强度因子。图3.13给出了4个典型例子。为了以后对照的方便,将集中弯矩的符号由  $M_x^*$  和  $M_y^*$  换成  $M_b$  和  $M_t$

$$M_b = -M_x^*, \quad M_t = M_y^* \quad (3.188)$$

③如图3.13(a),在  $z_0$  点作用集中弯曲力偶  $M_b$  和  $M_t$ ,在  $\bar{z}_0$  点作用与之大小相等,转向相反的弯曲力偶。

应用式(3.187),将两个对称位置作用弯曲力偶的解叠加,并注意到式(3.188),可以得到

$$\begin{aligned} K_1 - iK_2 = & (M_b - iM_t) \frac{6}{\sqrt{\pi a} h^2} \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \sin \frac{\theta_A - \theta_B}{2} + \\ & (M_b + iM_t) \frac{3(1-\nu)y_0 \sqrt{a}}{\sqrt{\pi r_A r_B r_A} h^2} \cos \frac{3\theta_A + \theta_B}{2} \end{aligned} \quad (3.189)$$

分离实部和虚部,就得到在裂纹尖端  $a$  的弯曲 I 型和 II 型应力强度因子

$$\left\{ \begin{aligned} K_1 &= \left[ \frac{6}{\sqrt{\pi a} h^2} \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \sin \frac{\theta_A - \theta_B}{2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{3(1-\nu)y_0 \sqrt{a}}{\sqrt{\pi r_A r_B r_A} h^2} \cos \frac{3\theta_A + \theta_B}{2} \right] M_b \\ K_2 &= \left[ \frac{6}{\sqrt{\pi a} h^2} \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \sin \frac{\theta_A - \theta_B}{2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{3(1-\nu)y_0 \sqrt{a}}{\sqrt{\pi r_A r_B r_A} h^2} \cos \frac{3\theta_A + \theta_B}{2} \right] M_t \end{aligned} \right. \quad (3.190)$$

④如图3.13(b)所示,在裂纹上下表面作用一对相反的集中弯矩和扭矩。

令图3.13(a)中载荷点  $z_0$  和  $\bar{z}_0$  分别从上半板和下半板趋于裂纹面一点  $d$ ,就得到此问题的解答。此时

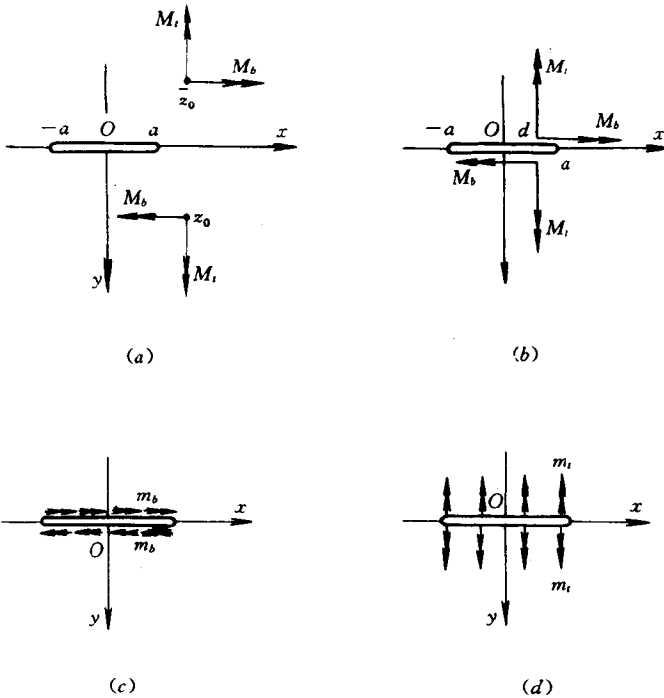


图3.13 中心裂纹板的4种加载情形

$$r_A = a - d, r_B = a + d, \theta_A = \pi, \theta_B = 0, y_0 = 0 \quad (3.191)$$

将上式代入式(3.190), 得到

$$K_1 = \frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} \sqrt{\frac{a+d}{a-d}} M_b, \quad K_2 = \frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} \sqrt{\frac{a+d}{a-d}} \quad (3.192)$$

⑤如图3.13(c)和(d)所示, 在裂纹面分别作用均匀弯矩  $m_b$  和均匀扭矩  $m_t$ 。将式(3.192)作为基本奇异解, 沿裂纹面积分, 就得到这两种情形在裂纹尖端  $a$  的弯曲应力强度因子。

对图3.13(c)所示的问题

$$K_1 = \int_{-a}^a \frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} m_b d\xi = \frac{6}{h^2} \sqrt{\pi a} m_b \quad (3.193)$$

对图3.13(d)所示的问题

$$K_2 = \int_{-a}^a \frac{6}{\sqrt{\pi a} h^2} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} m_i d\xi = \frac{6}{h^2} \sqrt{\pi a} m_i \quad (3.194)$$

如果令  $m_b = M^\infty$ ,  $m_t = M_{xy}^\infty$ , 则式(3.193)和(3.194)分别与式(3.112)和(3.114)中相应的弯曲应力强度因子公式相同。这一点应该是早就预料到的。

例2 无限板在  $x$  轴上有两条从  $-\infty$  到  $-a$ , 从  $a$  到  $\infty$  的共线半无限裂纹, 在任一点  $z_0$  处作用集中弯矩  $M_x^*$  和  $M_y^*$ 。在两半板连接韧带上下半板对于上半板作用的内力合力为零, 合力矩为  $M_x^R$  和  $M_y^R$  (见图3.14)。

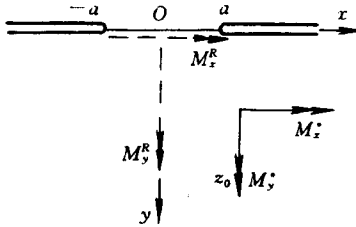


图3.14 两共线半无限裂纹板

对于这类裂纹问题, 通解(3.164)成为

$$\Phi_0(z) = I(z)X_0(z) + C_1X_0(z) \quad (3.195)$$

其中

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(t)}{X^+(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} \quad (3.196)$$

$F(t)$  已由式(3.163)给出。板在无穷远应力为零, 故  $\Gamma = \Gamma' = 0$ 。在板的连接韧带上, 内力的合剪力为零, 由式(3.145)知道, 虚常数  $iC$  在两个裂纹面的数值相等, 可以取作零。于是函数  $F(t)$  可以写为

$$F(t) = -\frac{M}{t-z_0} - \frac{M}{\kappa(t-\bar{z}_0)} - \frac{\bar{M}(z_0-\bar{z}_0)}{\kappa(t-\bar{z}_0)} \quad (3.197)$$



函数  $X_0(z)$  已由式 (3.175) 表示, 不过割线  $L$  的位置已换为  $(-\infty, -a)$  和  $(a, \infty)$ , 限定  $X_0(z)$  的单值枝的式 (3.166) (取  $n=1$ ) 中  $|z|$  是从下半平面趋于  $\infty$ . 注意到在  $L$  上, 关系式 (3.177) 成立, 积分式 (3.196) 可以化为两个对半无限域的 Cauchy 积分之差

$$I(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_1} \frac{F(t)}{X_0^+(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_2} \frac{F(t)}{X_0^-(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} \right] \quad (3.198)$$

积分直线  $\Lambda_1$  和  $\Lambda_2$  如图 3.15 所示。

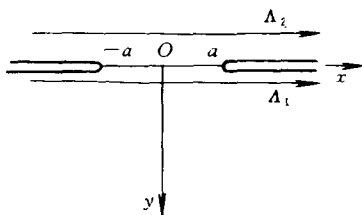


图3.15 对半无限域的积分直线  $\Lambda_1$  和  $\Lambda_2$

根据文献[13], 式 (3.198) 的两个对半无限域的 Cauchy 积分能够积成封闭公式. 将所得结果代入式 (3.195), 然后代入式 (3.151) 第一式, 得到

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \frac{1}{2} \left[ \frac{M}{z-z_0} - \frac{M}{\kappa(z-\bar{z}_0)} - \frac{\bar{M}(z_0-\bar{z}_0)}{\kappa(z-\bar{z}_0)^2} \right] + \\ & \frac{X_0(z)}{2X_0(z_0)} \cdot \frac{M}{z-z_0} + \frac{X_0(z)}{2X_0(z_0)} \left[ \frac{M}{\kappa(z-\bar{z}_0)} + \right. \\ & \left. \frac{\bar{M}(z_0-\bar{z}_0)}{\kappa(z-\bar{z}_0)} + \frac{\bar{M}(z_0-\bar{z}_0)}{\kappa(z-\bar{z}_0)} \cdot \frac{\bar{z}_0}{z_0^2-a^2} \right] + C_0 X_0(z) \end{aligned} \quad (3.199)$$

其中  $C_0$  是一个待定复常数。

利用式 (3.153) 和 (3.161), 可以求出  $\Omega(z)$ 。

为了确定  $C_0$ , 设想将板的连接韧带从  $-a$  到  $a$  剪开, 利用式

(3.141)、(3.142)、(3.154)与补充条件(3.149),可以得到

$$\int_{L'} D(1-\nu)[\kappa\Phi^+(t) + \Omega^-(t)]dt = -(M_x^R + iM_y^R) \quad (3.200)$$

上式左边可以化成一个复函数的围道积分。围道如图3.16所示,注意围道  $\Lambda$  在越过裂纹面后在上半平面进入 Riemann 面的另一枝,也就是说,此围道积分是在沿  $-a$  到  $a$  割开的平面上,在围道外无割线。利用残数定理,可以确定  $C_0$  之值

$$C_0 = -\frac{M_x^R + iM_y^R}{2\pi i D(3+\nu)} + \frac{M_x^* + iM_y^*}{4\pi i D(3+\nu)} \quad (3.201)$$

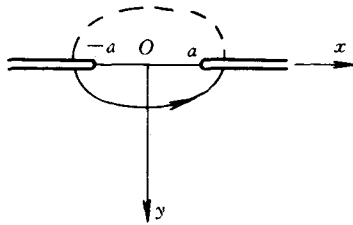


图3.16 积分围道

注意到对于所取的  $X_0(z)$  的单值枝,在  $x$  轴的连接韧带(从  $-a$  到  $a$  的部分)上有

$$X_0(z) = -\frac{i}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{在 } L' \text{ 上} \quad (3.202)$$

将由式(3.199)给出的  $\Phi(z)$  代入公式(3.108),取  $z_1 = a - 0$ ,得到裂纹尖端  $a$  的复弯曲应力强度因子

$$K_1 - iK_2 = -\frac{3(3+\nu)}{4\sqrt{\pi}ah^2} \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \left[ e^{\frac{i}{2}(\theta_B - \theta_A)} - \frac{1-\nu}{3+\nu} e^{\frac{i}{2}(\theta_A - \theta_B - 2\pi)} \right] \cdot \\ (M_x^* + iM_y^*) - \frac{3(1-\nu)y_0\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi r_A r_B r_A} h^2} \cdot \\ e^{\frac{i}{2}(3\theta_A + \theta_B)} (M_y^* + iM_x^*) +$$

$$\frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} \left( \frac{M_x^* + i M_y^*}{2} - M_x^R - i M_y^R \right) \quad (3.203)$$

式中各几何量见图3.17。为图形简单，没有画出连接韧带内力的合力矩。

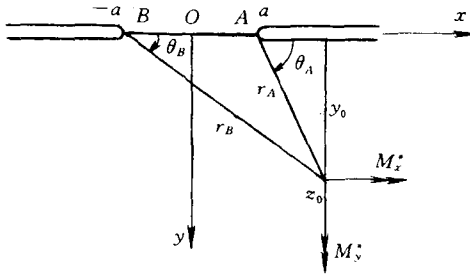


图3.17 集中弯矩作用点的几何位置

下面利用式(3.203)，计算图3.18所示4种典型承载情形的应力强度因子。为了对照的方便，除了作式(3.188)的符号替换外，还令连接线上

$$M_b^R = -M_x^R, \quad M_t^R = M_y^R \quad (3.204)$$

但为图形简单，在图3.18(b)~(d)中没有画上连接线上内力的合力矩。

①如图3.18(a)所示，连接韧带上下半板对上半板的内力的合力矩分量为  $M_b^R$  和  $M_t^R$ ，裂纹尖端附近无外载。

令式(3.203)中  $M_y^* = M_x^* = 0$ ，求得在裂纹尖端  $a$  的应力强度因子为

$$K_1 = \frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} M_b^R, \quad K_2 = \frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} M_t^R \quad (3.205)$$

这两个公式的理论意义和实用价值将在 § 4.5 中讨论。

②对于图3.18(b)所示问题(为图形简单，连接韧带上内力的合力矩分量  $M_b^R$  和  $M_t^R$  没有画出)，在裂纹尖端  $a$  的弯曲应力强度因子公式为

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \left[ \frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} \cos \frac{\theta_B - \theta_A}{2} - \frac{3(1 - \nu) y_0 \sqrt{a}}{\sqrt{\pi} r^2 h^2} \sin \frac{3\theta_A + \theta_B}{2} \right] \cdot \\
 &\quad M_b + \frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} (M_b^R - M_b) \\
 K_2 &= \left[ \frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} \cos \frac{\theta_B - \theta_A}{2} + \frac{3(1 - \nu) y_0 \sqrt{a}}{\sqrt{\pi} r^2 h^2} \sin \frac{3\theta_A + \theta_B}{2} \right] \cdot \\
 &\quad M_t + \frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} (M_t^R - M_t)
 \end{aligned} \tag{3.206}$$

如果两半板在远处无外载,则由每个半板的静力平衡条件得到  $M_b^R = M_b$  和  $M_t^R = M_t$ ,公式(3.206)成为

$$\begin{cases} K_1 = \left[ \frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} \cos \frac{\theta_B - \theta_A}{2} - \frac{3(1 - \nu) y_0 \sqrt{a}}{\sqrt{\pi} r^2 h^2} \sin \frac{3\theta_A + \theta_B}{2} \right] M_b \\ K_2 = \left[ \frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} \cos \frac{\theta_B - \theta_A}{2} + \frac{3(1 - \nu) y_0 \sqrt{a}}{\sqrt{\pi} r^2 h^2} \sin \frac{3\theta_A + \theta_B}{2} \right] M_t \end{cases} \tag{3.207}$$

③对于图3.18(c)所示问题,在裂纹尖端  $a$  的弯曲应力强度因子为

$$\begin{cases} K_1 \\ K_2 \end{cases} = \frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} \left\{ \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} - 1 \right\} \begin{cases} M_b \\ M_t \end{cases} + \frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} \begin{cases} M_b^R \\ M_t^R \end{cases} \tag{3.208}$$

若两半板在远处无外载,则公式(3.208)成为

$$\begin{cases} K_1 \\ K_2 \end{cases} = \frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \begin{cases} M_b \\ M_t \end{cases} \tag{3.209}$$

④对于图3.18(d)所示问题,在裂纹尖端  $a$  的弯曲应力强度因子公式为

$$\begin{cases} K_1 \\ K_2 \end{cases} = \frac{12}{\sqrt{\pi a h^2}} \left( \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} - 1 \right) \begin{cases} M_b \\ M_t \end{cases} + \frac{6}{\sqrt{\pi a h^2}} \begin{cases} M_b^R \\ M_t^R \end{cases} \tag{3.210}$$

若两半板在远处无外载,则由静力学条件得到  $M_b^R = 2M_b$  和  $M_t^R = 2M_t$ ,式(3.210)成为

$$\begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{Bmatrix} = \frac{12}{\sqrt{\pi a h^3}} \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \begin{Bmatrix} M_b \\ M_t \end{Bmatrix} \quad (3.211)$$

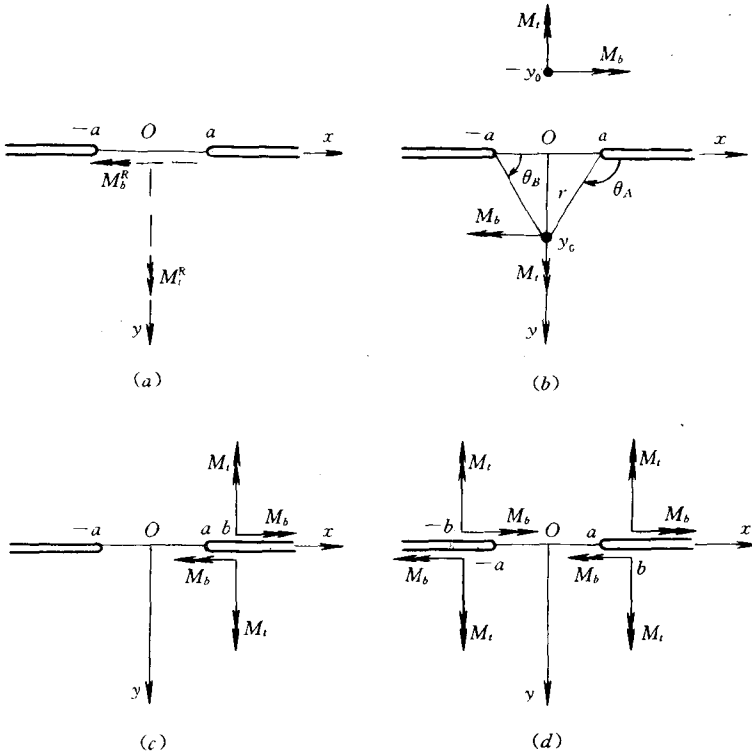


图3.18 共线半无限裂纹板的4种加载情形

例3 两条等长有限裂纹位于  $x$  轴上  $(-b, -a)$  和  $(a, b)$ 。无穷远受均匀弯矩和扭矩。

显然,韧带  $(-a, a)$  上内力的等效剪力的合力为零,于是  $iC$  在两裂纹面之值相等,可取为零。按照求解上两问题的方式计算通解(3.164)中的 Cauchy 型积分,得到

$$\Phi_0(z) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)\Gamma - \frac{1}{2}\frac{\bar{\Gamma}'}{\kappa} + \frac{C_0z^2 + C_1z + C_2}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \quad (3.212)$$

其中根式所取的单值枝使得

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{z^2}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} = 1 \quad (3.213)$$

由于  $\Phi_0(z)$  在无穷远为零, 故由式(3.212)得

$$C_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)\Gamma + \frac{1}{2}\frac{\bar{\Gamma}'}{\kappa} \quad (3.214)$$

将解答式(3.212)代入位移单值条件式(3.170), 稍作变换, 可得两个方程

$$\oint_{\Lambda} \frac{C_0z^2 + C_1z + C_2}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} dz = 0 \quad (3.215)$$

其中  $\Lambda$  是包围两条裂纹在内的闭围道。

$$\int_a^b \frac{C_0x^2 + C_1x + C_2}{\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx = 0 \quad (3.216)$$

利用残数定理计算方程(3.215)中的围道积分, 得到

$$C_1 = 0 \quad (3.217)$$

从方程(3.216)则得出

$$C_2 = -b^2 \frac{E(k)}{K(k)} C_0, \quad k^2 = \frac{a^2}{b^2} \quad (3.218)$$

其中  $K(k)$  和  $E(k)$  分别是第一类和第二类完全椭圆积分。

从式(3.151)第一式可以看到, 当  $z$  趋于裂纹尖端时, 函数  $\Phi_0(z)$  与  $\Phi(z)$  具有相同的奇异性, 故将函数  $\Phi_0(z)$  代替  $\Phi(z)$  代入式(3.108), 就能求得复弯曲应力强度因子。

在裂纹尖端  $x = -a$

$$K_1 - iK_2|_{x=-a} = -\frac{12\sqrt{2\pi}(3+\nu)D}{h^2} \lim_{x \rightarrow -a+0} (x+a)^{\frac{1}{2}} \Phi_0(x) \quad (3.219)$$

由此求得

$$K_1 - iK_2|_{x=-a} = \frac{12 \sqrt{\pi} D(3 + \nu) C_0}{h^2} \cdot \frac{a^2 - b^2 \frac{E(k)}{K(k)}}{\sqrt{a(b^2 - a^2)}} \quad (3.220)$$

在裂纹尖端  $x=b$

$$\begin{aligned} K_1 - iK_2|_{x=b} &= -\frac{12 \sqrt{2\pi}(3 + \nu)D}{h^2} \lim_{x \rightarrow b+0} (x-b)^{\frac{1}{2}} \Phi_0(x) = \\ &= -\frac{12 \sqrt{\pi} D(3 + \nu)C_0}{h^2} \cdot \frac{b \sqrt{b} \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)}\right]}{\sqrt{b^2 - a^2}} \end{aligned} \quad (3.221)$$

下面利用式(3.219)与(3.220), 给出图3.19所示两种典型情况的弯曲应力强度因子公式。

①如图3.19(a)所示, 无穷远受均匀弯矩  $M_y = M^\infty$ 。这种情况仅有 I 型应力强度因子, II 型应力强度因子为零

$$K_{I, x=-a} = \frac{6 \sqrt{\pi} M^\infty}{h^2 \sqrt{a(b^2 - a^2)}} \left[ b^2 \frac{E(k)}{K(k)} - a^2 \right] \quad (3.222)$$

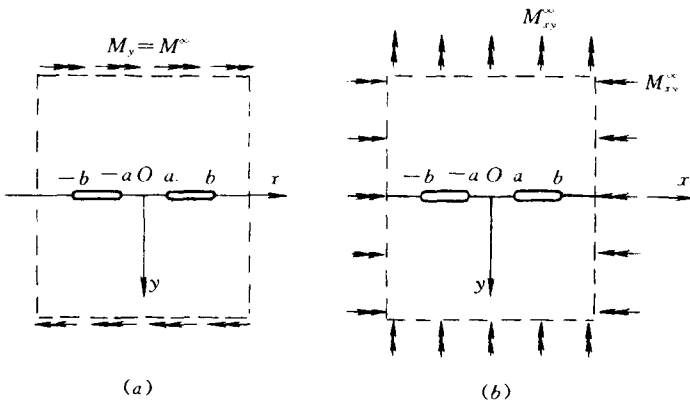


图3.19 两共线等长裂纹板

$$K_1|_{x=b} = \frac{6b \sqrt{b\pi} M_{xy}^\infty}{h^2 \sqrt{b^2 - a^2}} \left[ 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (3.223)$$

②如图3.19(b)所示,无穷远受均匀扭矩  $M_{xy}^\infty$ 。这种情况仅有 I 型应力强度因子

$$K_2|_{x=-a} = \frac{6 \sqrt{\pi} M_{xy}^\infty}{h^2 \sqrt{a(b^2 - a^2)}} \left[ b^2 \frac{E(k)}{K(k)} - a^2 \right] \quad (3.224)$$

$$K_2|_{x=b} = \frac{6b \sqrt{b\pi} M_{xy}^\infty}{h^2 \sqrt{b^2 - a^2}} \left[ 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (3.225)$$

例4 如图3.20所示,  $x$  轴上有长  $2a$ , 间距为  $2b$  的周期裂纹。当  $|y|$  为无穷大时,板受均匀弯矩和扭矩。

显然各相连的韧带上内力的合剪力为零,方程(3.158)中  $iC$  可取为零。

为了解决这个问题,利用保角变换函数

$$z = \frac{2b}{\pi} \arctg \zeta, \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (3.226)$$

将图3.20(a)所示  $z$  平面上两虚线间的一个周期域保角映照到图3.20(b)所示的  $\zeta$  平面。图中标记了对应的特征点。

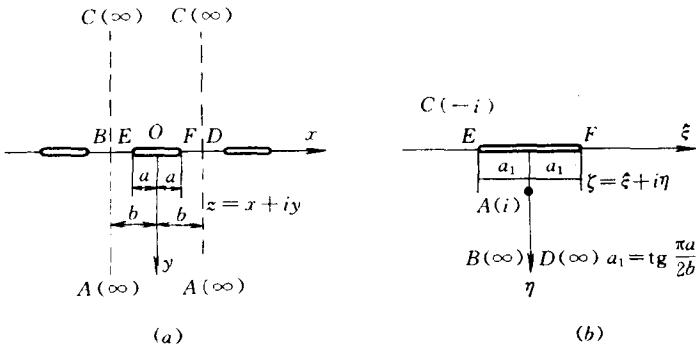


图3.20 周期裂纹域的保角映照

在这种变换下,方程(3.158)和(3.159)在  $\zeta$  平面上成为(注意到  $iC=0$ )



$$\begin{aligned} [\kappa\Phi_1(\xi) + \Omega_1(\xi)]^+ + [\kappa\Phi_1(\xi) + \Omega_1(\xi)]^- &= 0 \\ |\xi| \leq \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2b}, \eta &= 0 \end{aligned} \quad (3.227)$$

$$\begin{aligned} [\kappa\Phi_1(\xi) - \Omega_1(\xi)]^+ - [\kappa\Phi_1(\xi) - \Omega_1(\xi)]^- &= 0 \\ |\xi| \leq \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2b}, \eta &= 0 \end{aligned} \quad (3.228)$$

由于  $\Phi_1(\zeta)$  和  $\Omega_1(\zeta)$  在沿  $EF$  割开的  $\zeta$  平面内解析, 根据文献 [13], 方程 (3.227) 和 (3.228) 的解为

$$\begin{cases} \Phi_1(\zeta) = \frac{C_0}{2\kappa} + \frac{1}{\kappa} \frac{C_1\zeta + C_2}{\sqrt{\zeta^2 - a_1^2}} \\ \Omega_1(\zeta) = -\frac{C_0}{2} + \frac{C_1\zeta + C_2}{\sqrt{\zeta^2 - a_1^2}} \end{cases} \quad a_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2b} \quad (3.229)$$

回到  $z$  平面

$$\begin{cases} \Phi(z) = \frac{C_0}{2\kappa} + \frac{1}{\kappa} \frac{C_1 \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2b} + C_2}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi z}{2b} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi a}{2b}}} \\ \Omega(z) = -\frac{C_0}{2} + \frac{C_1 \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2b} + C_2}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi z}{2b} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi a}{2b}}} \end{cases} \quad (3.230)$$

注意到对于充分大的  $|y|$  有

$$\Phi(z) = \Gamma + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \Omega(z) = \Gamma + \bar{\Gamma}' + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (3.231)$$

比较式 (2.230) 与 (3.231) 在  $|y| \rightarrow \infty$  时的展开式得

$$\begin{cases} \frac{C_0}{2\kappa} + \frac{C_1}{\kappa} \operatorname{sec} \frac{\pi a}{2b} = \Gamma \\ -\frac{C_0}{2} + C_1 \operatorname{sec} \frac{\pi a}{2b} = \Gamma + \bar{\Gamma}' \\ C_2 = 0 \end{cases} \quad (2.232)$$

由方程组 (3.232) 解出  $C_0, C_1$  和  $C_2$  三个常数, 然后代入解答式 (3.230), 得到

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\kappa})\Gamma - \frac{1}{2\kappa}\bar{\Gamma}' + \left[ \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\kappa})\Gamma + \frac{1}{2\kappa}\bar{\Gamma}' \right] \cdot \\ &\quad \frac{\sec \frac{\pi a}{2b} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2b}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi z}{2b} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi a}{2b}}} \\ \Omega(z) &= \frac{1}{2}(1 - \kappa)\Gamma + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}' + \left[ \frac{1}{2}(1 + \kappa)\Gamma + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}' \right] \cdot \\ &\quad \frac{\sec \frac{\pi a}{2b} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2b}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi z}{2b} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi a}{2b}}} \end{aligned} \right. \quad (3.233)$$

将式(3.233)第一式代入复应力强度因子公式(3.108),令  $z_1 = a$ ,可以求得此问题的弯曲应力强度因子。设  $|y| \rightarrow \infty$ 时,弯矩  $M_y = M^\infty$ ,扭矩  $M_{xy} = M_{xy}^\infty$ ,弯曲应力强度因子公式为

$$\begin{cases} K_1 = \frac{6M^\infty}{h^2} \sqrt{2btg \frac{\pi a}{2b}} \\ K_2 = \frac{6M_{xy}^\infty}{h^2} \sqrt{2btg \frac{\pi a}{2b}} \end{cases} \quad (3.234)$$

### § 3.9 共圆曲线裂纹问题的解答及弯曲应力强度因子公式

为了解曲线裂纹的特征,下面研究一类共圆周的圆弧曲线裂纹问题。

#### 1. 问题的描述及一般解答

如图3.21所示,在一个无限弹性板中,沿一个半径为  $R$  的圆周分布着若干条圆弧裂纹  $L_j$ ,裂纹端点为  $a_j$  和  $b_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ )。设  $L$  是  $L_j$  的总体, $L'$ 是圆周上未开裂的部分。集中弯矩  $M_i^*$  和  $M_j^*$  作用在板内任一点  $z_0$ 。无穷远为均匀内力状态,已给定无穷远

弯矩  $M_x^0, M_y^0$  和扭矩  $M_{xy}^0$ , 或者等价地给定了无穷远主弯矩  $M_1^0, M_2^0$  及  $M_1^0$  的主面外法线与  $x$  轴的夹角  $\alpha$ 。

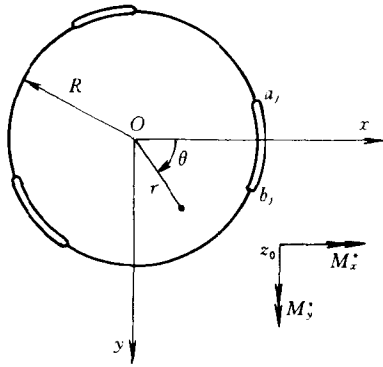


图3.21 含共圆弧裂纹的无限弹性板

设裂纹面无外载, 则裂纹面弯矩  $m(t)$  和等效扭矩  $f(t)$  都等于零。于是圆弧裂纹面的边界条件可以表示为

$$[m(t) + if(t)]^+ = [m(t) + if(t)]^- = 0 \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.235)$$

其中  $t$  表示圆周上的点, 上标+和-分别表示宗量从圆内域  $\Sigma^+$  和外域  $\Sigma^-$  趋于圆周的函数值。

根据对函数的奇异性分析, 可以知道对于所论圆弧裂纹问题, 函数  $\Phi(z)$  和  $\Psi(z)$  仍然具有式(3.151)的形式

$$\begin{cases} \Phi(z) = \frac{M}{z - z_0} + \Gamma + \Phi_0(z) \\ \Psi(z) = \frac{\bar{M}}{z - z_0} + \frac{M \bar{z}_0}{(z - z_0)^2} + \Gamma' + \Psi_0(z) \end{cases} \quad (3.236)$$

其中  $M$  见式(3.125),  $\Gamma$  和  $\Gamma'$  见式(3.41)和(3.42);  $\Phi_0(z)$  和  $\Psi_0(z)$  为沿圆弧  $L$  割开的平面内的解析函数, 在无穷远为零。

为了求解问题, 根据对圆周的对称原理引进一个新的解析函数  $\Omega(z)$

$$\Omega(z) = \bar{\Phi}\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}\left(\frac{R^2}{z}\right) \quad (3.237)$$

引进此函数后,  $\Psi(z)$  能够由  $\Omega(z)$  和  $\Phi(z)$  表示

$$\Psi(z) = \frac{R^2}{z^2} \Phi(z) - \frac{R^2}{z} \Phi'(z) - \frac{R^2}{z^2} \bar{\Omega}\left(\frac{R^2}{z}\right) \quad (3.238)$$

注意到在  $z=0$  的邻域, 函数  $\Phi_0(z)$  和  $\Psi_0(z)$  能够展开为

$$\Phi_0(z) = A_0 + O(z), \quad \Psi_0(z) = B_0 + O(z) \quad (3.239)$$

将式(3.236)代入式(3.237), 得出  $\Omega(z)$  在各极点的主部和正则部分的分离形式

$$\Omega(z) = \frac{M}{z - z^*} - \frac{M}{z} + \frac{\bar{M}z^*(z^* - z_0)}{z_0(z - z^*)^2} - \frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{z^2} + C_0 + \Omega_0(z) \quad (3.240)$$

其中  $\Omega_0(z)$  在沿  $L$  割开的平面内解析, 在无穷远为零;  $C_0$  为复常数;  $z^*$  为  $z_0$  对圆周的反射点

$$z^* = R^2 / \bar{z}_0 \quad (3.241)$$

易于验证, 对于圆弧上的点  $t$  有

$$t \bar{t} = R^2 \quad (3.242)$$

对应于式(3.141), 圆弧裂纹自由边的边界条件能够由复函数表示

$$D(1 - \nu) \left[ \kappa \Phi(t) + \bar{\Phi}(t) - \frac{R^2}{t} \bar{\Phi}(t) - \frac{R^2}{t^2} \bar{\Psi}(t) \right] = m(t) + if(t) + iC \quad (3.243)$$

将式(3.238)代入式(3.243), 再代入裂纹面的边界条件(3.235), 得到

$$\kappa \Phi^+(t) + \Omega^-(t) = iC \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.244)$$

$$\kappa \Phi^-(t) + \Omega^-(t) = iC \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.245)$$

其中  $iC$  的形式同式(3.144), 在不同的圆弧上可以为不同的常数。

将方程(3.244)和(3.245)相加和相减产生

$$[\kappa \Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\kappa \Phi(t) + \Omega(t)]^- = 2iC \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.246)$$

$$[\kappa \Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\kappa \Phi(t) - \Omega(t)]^- = 0 \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.247)$$

将式(3.236)第一式和式(3.240)代入方程(3.247),得到

$$[\kappa\Phi_c(t) - \Omega_0(t)]^- - [\kappa\Phi_0(t) - \Omega_0(t)]^- = 0 \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.248)$$

于是可知,  $\kappa\Phi_0(z) - \Omega_0(z)$  在全平面解析, 在无穷远为零。根据 Liouville 定理

$$\kappa\Phi_0(z) - \Omega_0(z) = 0 \quad (3.249)$$

将式(3.236)第一式和式(3.240)代入方程(3.246), 并利用式(3.249), 得到函数方程

$$\Phi_0^+(t) + \Phi_0^-(t) = F(t) \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.250)$$

其中

$$F(t) = -\frac{M}{t - z_0} - \frac{M}{\kappa(t - z^*)} + \frac{M}{\kappa t} - \frac{Mz^*(z^* - z_0)}{\kappa z_0(t - z^*)^2} + \frac{R\bar{\Gamma}'}{\kappa t^2} - \Gamma - \frac{C_0}{\kappa} + \frac{iC}{\kappa} \quad (3.251)$$

根据文献[13], 函数方程(3.250)的通解为

$$\Phi_0(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{F(t)}{X_0^+(t)} \cdot \frac{dt}{t - z} + X_0(z)P(z) \quad (3.252)$$

其中

$$X_0(z) = \prod_{j=1}^N (z - a_j)^{-\frac{1}{2}} (z - b_j)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.253)$$

所取的单值枝使得

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n X_0(z) = 1 \quad (3.254)$$

$P(z)$  是同  $\Phi_0(z)$  在无穷远性质相同的多项式

$$P(z) = C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \cdots + C_n \quad (3.255)$$

这样, 通解(3.252)中共包含  $n+1$  个复常数  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$  和  $n$  个实常数  $C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*$ 。

因为  $\Psi(z)$  在  $z=0$  处是解析的, 故由式(3.238)可以导出一个确定待定常数的代数方程

$$\bar{C}_0 = \Phi(0) \quad (3.256)$$

其余确定常数所需的代数方程可根据共直线裂纹问题的相应方程类推。

## 2. 一条圆弧裂纹问题的封闭形式解

为了将圆弧裂纹问题与直线裂纹问题作一比较,下面详细研究一条圆弧裂纹问题。

如图3.22所示,无限弹性板内有一条圆弧裂纹 $ab$ ,集中弯矩 $M_x^*$ 和 $M_y^*$ 作用在任一点 $z_0$ ,无穷远为均匀内力状态。

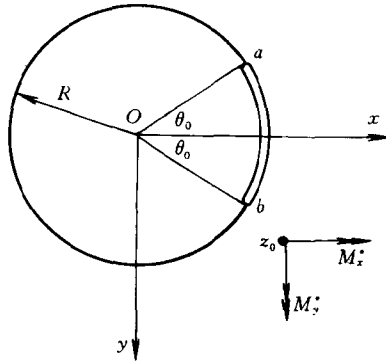


图3.22 一条圆弧裂纹问题

以圆心为中心建立极坐标。不失一般性,设裂纹尖端的极坐标为

$$a = Re^{-i\theta_0}, \quad b = Re^{i\theta_0} \quad (3.257)$$

注意到式(3.157)和(3.173),通解(3.252)成为

$$\Phi_0(z) = I(z)X_0(z) \quad (3.258)$$

其中

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{F(t)}{X_0^+(t)} \frac{dt}{t-z} \quad (3.259)$$

$$F(t) = -\frac{M}{t-z_0} - \frac{M}{\kappa(t-z^*)} + \frac{M}{\kappa t} - \frac{\overline{Mz^*}(z^*-z_0)}{\kappa z_0(t-z^*)^2} + \frac{R^2 \overline{\Gamma'}}{\kappa t^2} - \Gamma - \frac{C_0}{\kappa} \quad (3.260)$$

$$X_0(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \quad (3.261)$$

所取单值枝见式(3.254),其中  $n=1$ 。

仿照式(3.178)的积分方式,可以将式(3.259)的 Cauchy 型积分化为包围裂纹  $ab$  的围道积分,并使  $F(z)$  的极点  $z=z_0, z^*, 0$  均在围道外。根据推广的对无穷域的 Cauchy 积分公式,可以得到积分式(3.259)的封闭公式

$$I(z) = \frac{1}{2} \frac{F(z)}{X_0(z)} - \frac{1}{2} G(z) \quad (3.262)$$

其中  $G(z)$  为  $F(z)/X_0(z)$  在极点  $z=z_0, z^*, 0, \infty$  的主部(即使函数在无穷远之值为常数  $\tilde{C}$ ,我们也说此函数在无穷远有零阶极点,主部为  $\tilde{C}$ )

$$\begin{aligned} G(z) = & \frac{1}{X_0(0)} \left\{ \frac{M}{\kappa z} + \frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{\kappa z^2} \left[ 1 - \frac{X_0'(0)}{X_0(0)} z \right] \right\} - \\ & \frac{1}{X_0(z_0)} \cdot \frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{X_0(z^*)} \cdot \\ & \left\{ \frac{M}{\kappa(z - z^*)} + \frac{\bar{M} z^* (z^* - z_0)}{\kappa \bar{z}_0 (z - z^*)^2} \right. \\ & \left. \left[ 1 - (z - z^*) \frac{X_0'(z^*)}{X_0(z^*)} \right] \right\} - \\ & M - \left( \Gamma + \frac{C_0}{\kappa} \right) (z - R \cos \theta_0) \end{aligned} \quad (3.263)$$

将式(3.262)代入解答式(3.258),再代入式(3.236)第一式,得到

$$\Phi(z) = F^*(z) - \frac{1}{2} G(z) X_0(z) \quad (3.264)$$

其中

$$\begin{aligned} F^*(z) = & \frac{1}{2} \left[ \frac{M}{z - z_0} - \frac{M}{\kappa(z - z^*)} + \frac{M}{\kappa z} - \right. \\ & \left. \frac{\bar{M} z^* (z^* - z_0)}{\kappa \bar{z}_0 (z - z^*)^2} + \frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{\kappa z^2} + \Gamma - \frac{C_0}{\kappa} \right] \end{aligned} \quad (3.265)$$

为了确定解答中所剩的待定常数  $C_0$ , 将式(3.264)代入条件式(3.256), 得到

$$\bar{C}_0 = A_1 + A_2 C_0 \quad (3.266)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 = & \frac{1}{2} \left[ -\frac{M}{z_0} + \frac{M}{\kappa z^*} + \frac{\bar{M}(z_0 - z^*)}{\kappa z_0 z^*} + \Gamma \right] - \\ & \frac{1}{2} \frac{X_0(0)}{X_0(z_0)} \cdot \frac{M}{z_0} + \frac{1}{2} \frac{X_0(0)}{X_0(z^*)} \cdot \\ & \left\{ -\frac{M}{\kappa z^*} + \frac{\bar{M}(z^* - z_0)}{\kappa z_0 z^*} \left[ 1 + \frac{z^* X_0'(z^*)}{X_0(z^*)} \right] \right\} + \\ & \frac{1}{2} M X_0(0) - \frac{1}{2} \Gamma X_0(0) R \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (3.267)$$

$$A_2 = \frac{1}{2\kappa} [1 + X_0(0) R \cos \theta_0] \quad (3.268)$$

由方程(3.266)求得

$$C_0 = \frac{\bar{A}_1 - A_1 \bar{A}_2}{1 - A_2 \bar{A}_2} \quad (3.269)$$

最后, 可由式(3.249)求得  $\Omega_0(z)$ , 由式(3.240)可以求得  $\Omega(z)$ , 由式(3.238)求得  $\Psi(z)$ 。

### 3. 弯曲应力强度因子

对于直线裂纹, 可以应用公式(3.108), 由  $\Phi(z)$  计算复弯曲应力强度因子。对于圆弧裂纹也能应用这个公式, 但需要进行坐标变换, 将裂纹尖端移到  $x$  轴上, 并使该处切线与  $x$  轴平行。为了求图 3.22 中裂纹尖端  $b$  的应力强度因子, 引入如下坐标变换

$$z = \omega(\tilde{z}) = ie^{i\theta_0} (\tilde{z} - iR - \frac{1}{2} R \sin 2\theta_0) \quad (3.270)$$

或

$$\tilde{z} = -ie^{-i\theta_0} z + iR + \frac{1}{2} R \sin 2\theta_0 \quad (3.271)$$



这样变换后,  $\tilde{z}$  平面上的  $\tilde{x}$  轴将与裂纹相切于端点  $\tilde{b}$  ( $z$  平面上  $b$  的对应点), 其中

$$\tilde{b} = \frac{1}{2}R\sin 2\theta_0 \quad (3.272)$$

复弯曲应力强度因子公式(3.108)变换为

$$K_1 - iK_2 = -\frac{12\sqrt{2\pi}D(3+\nu)}{h^2} \lim_{\tilde{z} \rightarrow \tilde{b}} (\tilde{z} - \tilde{b})^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Phi(\tilde{z})}{\omega'(\tilde{z})} \quad (3.273)$$

从式(3.270)

$$\omega'(\tilde{z}) = ie^{i\theta_0} \quad (3.274)$$

将解答式(3.264)代入公式(3.273), 得到一条圆弧裂纹问题的复弯曲应力强度因子公式

$$K_1 - iK_2 = -\frac{6\sqrt{\pi}D(3+\nu)e^{-\frac{\theta_0}{2}i}}{h^2\sqrt{R\sin\theta_0}} G[\omega(\tilde{b})] \quad (3.275)$$

作为与直线裂纹问题的一个对照, 考虑无穷远为均匀弯矩, 即  $M_1^\infty = M_2^\infty = M^\infty$  的情形。这时

$$M = 0, \quad \Gamma = -\frac{M^\infty}{2D(1+\nu)}, \quad \Gamma' = 0 \quad (3.276)$$

将式(3.276)代入式(3.263), 然后代入式(3.275), 得到在板的远处受均匀弯矩  $M^\infty$  时, 圆弧裂纹尖端  $b$  (图3.22)的弯曲应力强度因子

$$\begin{cases} K_1 \\ K_2 \end{cases} = \frac{12(3+\nu)\sqrt{\pi R\sin\theta_0}M^\infty}{h^2[5-3\nu+(1-\nu)\cos\theta_0]} \begin{cases} \cos \frac{\theta_0}{2} \\ \sin \frac{\theta_0}{2} \end{cases} \quad (3.277)$$

可以看到, 与直线裂纹不同的是, 即使在远处仅受均匀弯矩(无扭矩作用)时, 圆弧裂纹尖端也是 I 型和 II 型弯曲应力强度因子复合的。

对于弯曲应力强度因子公式(3.277)取极限, 令  $R \rightarrow \infty, \theta_0 \rightarrow$

0, 但保持  $R\sin\theta_0 = a$ , 我们得到

$$K_1 = \frac{6\sqrt{\pi a}M^\infty}{h^2} \quad K_2 = 0 \quad (3.278)$$

如所预料, 这正是无穷远受均匀弯矩时, 长  $2a$  的直线裂纹的弯曲应力强度因子, 与公式(3.112)一致。

## 第四章 含裂纹 Kirchhoff 板断裂分析的 局部-整体法

上一章已经用复变函数方法获得了一系列含裂纹 Kirchhoff 板弯曲问题的解析解。从应用的角度,这仍是不够的。对于较复杂的问题,像边界影响不可忽略的含裂纹有限尺寸板、不规则排列的多条裂纹问题,都必须研究数值解法。

有限元法是最强有力的数值分析工具,可是采用常规有限元法处理断裂问题并不十分理想。其原因在于裂纹尖端附近的应力急剧变化,必须采用非常稠密的网格,大大增加了计算工作量。即使如此,有限数目的单元仍然无法描述应力从有限到无限的变化规律,计算应力强度因子等断裂参数时必须借助解析结果,使用外推法间接推求,可能较为严重地影响精度。

实践表明,所谓局部-整体分析法是含裂纹构件或结构断裂分析的有效方法。将裂纹尖端区域严格的“局部解”与结构整体分析中常规的解析或数值方法相结合,较好地解决了精度与计算工作量之间的矛盾。柳春图和他的学生们对含裂纹板壳的局部-整体法进行了系统研究,并取得了重要进展。

如第二章所述,在 Williams<sup>[11]</sup>的工作的基础上,蒋持平等<sup>[50]</sup>推导了 Kirchhoff 板弯曲裂纹尖端场直至任意阶的通项公式。本章则利用所得到的位移展开式构造高阶裂纹尖端奇异元,并将奇异元与常规元结合,对含裂纹 Kirchhoff 板进行局部-整体分析。对于圆形的奇异元,还推导了其刚度矩阵元素的直至任意阶的显式通项公式,使用十分方便。数值结果及比较显示了这个方法的效率与精度,同时也评估了上一章所采用的无限板的理想模型的适用范围。

## § 4.1 裂纹尖端奇异元的位移模式与弯曲应力强度因子

### 1. 位移模式

本章所采用的裂纹尖端奇异元的位移模式由 Kirchhoff 板弯曲裂纹尖端位移场展开式(2.60)和(2.61)再加上三个刚体位移模式构成

$$\begin{aligned} w = \sum_{i=1}^N \left( \frac{r}{R} \right)^{i/2+1} [a_i F_i(\theta) + b_i G_i(\theta)] + w_0 + \\ \frac{r}{R} a_0 \cos \theta + \frac{r}{R} b_0 \sin \theta \end{aligned} \quad (4.1)$$

式中各几何量的意义参见图4.1:  $r$  和  $\theta$  是以裂纹尖端为中心的极坐标;  $R$  是某一特征长度, 例如对于圆形奇异元, 取为奇异元半径, 对于矩形奇异元, 取为对角线半长;  $a_i$  和  $b_i$  是待定系数, 也称为广义位移分量;  $F_i(\theta)$  和  $G_i(\theta)$  分别是对应于对称与反对称位移模式的角分布函数。

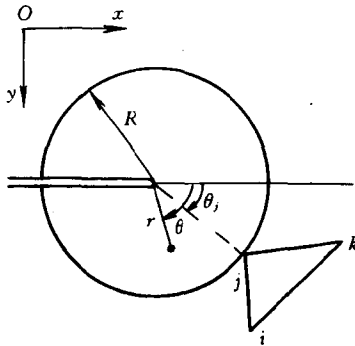


图4.1 裂纹尖端奇异元

按  $i$  取奇数和偶数,  $F_i(\theta)$  和  $G_i(\theta)$  可以表示为

(1) 当  $i$  是奇数, 即  $i = 2m - 1, m = 1, 2, 3, \dots$  时

$$F_{2m-1}(\theta) = \cos \frac{2m-3}{2}\theta - \frac{2m+5-(2m-3)\nu}{(2m+1)(1-\nu)} \cos \frac{2m+1}{2}\theta \quad (4.2)$$

$$G_{2m-1}(\theta) = \sin \frac{2m-3}{2}\theta - \frac{2m-7-(2m+1)\nu}{(2m+1)(1-\nu)} \sin \frac{2m+1}{2}\theta \quad (4.3)$$

(2) 当  $i$  是偶数, 即  $i=2m, m=1, 2, 3, \dots$  时

$$F_{2m}(\theta) = \cos(m-1)\theta - \frac{m-3-(m+1)\nu}{(m+1)(1-\nu)} \cos(m+1)\theta \quad (4.4)$$

$$G_{2m}(\theta) = \sin(m-1)\theta - \frac{m+3-(m-1)\nu}{(m+1)(1-\nu)} \sin(m+1)\theta \quad (4.5)$$

其中  $\nu$  为泊松比。

## 2. 应力强度因子的计算

Kirchhoff 板弯曲应力强度因子与其裂纹尖端位移场展开式首项之间的关系已经由式(2.66)和(2.67)给出。注意为了使后面推导的刚度矩阵元素表达式更简单, 位移模式(4.1)~(4.5)已经对位移场展开式(2.60)和(2.61)作了一个常数乘子的改变。如果将展开式(2.62)中首项系数  $a_1$  和  $b_1$  分别换成  $a_1^*$  和  $b_1^*$ , 那么它与位移模式首项系数  $a_1$  和  $b_1$  的关系为

$$a_1 = \frac{3(1-\nu)}{7+\nu} R^{\frac{3}{2}} a_1^*, b_1 = \frac{3(1-\nu)}{5+3\nu} R^{\frac{3}{2}} b_1^* \quad (4.6)$$

于是对于位移模式(4.1), 板弯曲应力强度因子公式为

$$K_1 = -\frac{6\sqrt{2\pi}(3+\nu)D}{h^2 R^{3/2}} a_1, K_2 = -\frac{6\sqrt{2\pi}(3+\nu)D}{h^2 R^{3/2}} b_1 \quad (4.7)$$

## § 4.2 裂纹尖端奇异元的刚度矩阵

利用 § 2.5 节给出的坐标变换关系式, 在极坐标下, Kirchhoff

板的曲率和扭率表达式(2.4)式变换为

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_r \\ \chi_\theta \\ \chi_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ -2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

将位移函数(4.1)代入式(4.8),得到

$$\{\chi\} = [B]\{\delta\} \quad (4.9)$$

其中 $\{\delta\}$ 是广义位移矢量

$$\{\delta\} = [a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N, w_0, a_0, b_0]^T \quad (4.10)$$

上标  $T$  表示转置。矩阵  $[B]$  可写为

$$[B] = [B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \dots, B_N^{(1)}, B_1^{(2)}, B_2^{(2)}, \dots, B_N^{(2)}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}] \quad (4.11)$$

其中

$$B_i^{(1)} = \begin{Bmatrix} B_{1i}^{(1)} \\ B_{2i}^{(1)} \\ B_{3i}^{(1)} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{r^2} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{i}{2}+1} \begin{Bmatrix} \frac{i}{2} \cdot \left( \frac{i}{2} + 1 \right) F_i(\theta) \\ \left( \frac{i}{2} + 1 \right) F_i(\theta) + F_i'(\theta) \\ i F_i'(\theta) \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

$$B_i^{(2)} = \begin{Bmatrix} B_{1i}^{(2)} \\ B_{2i}^{(2)} \\ B_{3i}^{(2)} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{r^2} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{i}{2}+1} \begin{Bmatrix} \frac{i}{2} \cdot \left( \frac{i}{2} + 1 \right) G_i(\theta) \\ \left( \frac{i}{2} + 1 \right) G_i(\theta) + G_i'(\theta) \\ i G_i'(\theta) \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

在极坐标下,弯矩  $M_r, M_\theta$  和扭矩  $M_{r\theta}$  可以表示为

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \end{Bmatrix} = [D]\{\chi\} \quad (4.14)$$

其中弹性矩阵

$$[D] = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}D \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

右边矩阵元素是板的弯曲刚度

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.16)$$

于是奇异元的应变能可以表示为

$$U = \frac{1}{2} \iint_A \{\chi\}^T \{M\} dA = \frac{1}{2} \iint_A \{\chi\}^T [D] \{\chi\} dA \quad (4.17)$$

其中  $A$  是奇异元的面积(沿厚度方向的积分已经完成)。

将式(4.9)代入式(4.17),得到

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K]^* \{\delta\} \quad (4.18)$$

其中  $[K]^*$  是奇异元的刚度矩阵,它能够表示为

$$[K]^* = \iint_A [B]^T [D] [B] dA \quad (4.19)$$

注意到位移函数能够分解成对称与反对称模式,奇异元刚度矩阵  $[K]^*$  能够分解为

$$[K]^* = \begin{bmatrix} [K^{(1)}] & 0 & 0 \\ 0 & [K^{(2)}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} N \text{ 行} \\ N \text{ 行} \\ 3 \text{ 行} \end{array} \quad (4.20)$$

N 列    N 列    3 列

其中子矩阵  $[K^{(1)}]$  和  $[K^{(2)}]$  分别对应于对称与反对称的位移模式,并且这两个非零子矩阵的计算是不耦合的,可以分别利用式(4.12)和(4.13)进行计算,设  $[K^{(s)}] = [K_{ij}^{(s)}]$ ,那么

$$K_{ij}^{(s)} = D \iint_A [(B_{1i}^{(s)} B_{1j}^{(s)} + B_{2i}^{(s)} B_{2j}^{(s)}) + \nu(B_{1i}^{(s)} B_{2j}^{(s)} + B_{2i}^{(s)} B_{1j}^{(s)}) + \frac{1-\nu}{2} B_{3i}^{(s)} B_{3j}^{(s)}] dA$$

$$s = 1, 2; \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (4.21)$$

奇异元刚度矩阵  $[K]^*$  中末三行与末三列零元素对应于三个刚体

位移,即垂直于板面的移动与绕两个直角坐标轴的转动。虽然这三个刚体位移对刚度矩阵没有贡献,但是为了与周围常规单元的连接,都是不可忽略的。对于一个半径为  $R$  的圆形裂纹尖端奇异元,式(4.21)中的积分可以积成简单的封闭公式,从而得到任意阶奇异元刚度矩阵元素的通项公式(4.22)~(4.27),在表4.1和4.2中还逐个列出了6阶奇异元刚度矩阵的元素。

$$K_{2m-1, 2n-1}^{(1)} = \frac{(2m-1)(2n-1)\pi D}{4(m+n-1)R^2} \cdot \begin{cases} (1-\nu)(4m^2-12m+1)+16+ \\ \frac{[2m+5-(2m-3)\nu]^2}{1-\nu} & m=n \\ -(2m-3)[(2n+5)-(2n-3)\nu] & m=n+2 \\ 8(1+\nu) & m+n=3 \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \quad (4.22)$$

$$K_{2m-1, 2n}^{(1)} = -(-1)^{m+n} \cdot \frac{4(2m-1)nD}{(2m+2n-1)R^2} \cdot \left\{ \frac{(1-\nu)(2m-3)(n-1)+4+4\nu}{2m-2n-1} + \frac{4+4\nu}{2m+2n-5} - \frac{(2m-3)[n-3-(n+1)\nu]}{2m-2n-5} - \frac{(n-1)[2m+5-(2m-3)\nu]}{2m-2n+3} + \frac{[2m+5-(2m-3)\nu][n-3-(n+1)\nu]}{(1-\nu)(2m-2n-1)} \right\} \quad (4.23)$$

$$K_{2m, 2n}^{(1)} = \frac{4mn\pi D}{(m+n)R^2} \cdot \begin{cases} 4(1+\nu) + \frac{4(1+\nu)^2}{1-\nu} & m=n=1 \\ (1-\nu)(m-1)^2 + 2(1+\nu) + \frac{[(m-3)-(m+1)\nu]^2}{(1-\nu)} & m=n \neq 1 \\ -(m-1)[n-3-(n+1)\nu] & m=n+2 \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \quad (4.24)$$



$$K_{2m-1, 2n-1}^{(2)} = \frac{(2m-1)(2n-1)\pi D}{4(m+n-1)R^2} \cdot \begin{cases} (1-\nu)(4m^2-12m+1)+16+ \\ \quad \frac{[7-2m+(2m+1)\nu]^2}{1-\nu} & m=n \\ (2m-3)[(7-2n)+(2n+1)\nu] & m=n+2 \\ -8(1+\nu) & m+n=3 \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \quad (4.25)$$

$$K_{2m-1, 2n}^{(2)} = -(-1)^{m+n} \cdot \frac{4(2m-1)nD}{(2m+2n-1)R^2} \cdot \left\{ \frac{(1-\nu)(2m-3)(n-1)+4+4\nu}{2m-2n-1} - \frac{4+4\nu}{2m+2n-5} - \frac{(2m-3)[n+3+(1-n)\nu]}{2m-2n-5} + \frac{(n-1)[7-2m+(2m-1)\nu]}{2m-2n+3} - \frac{[7-2m+(2m+1)\nu][n+3+(1-n)\nu]}{(1-\nu)(2m-2n-1)} \right\} \quad (4.26)$$

$$K_{2m, 2n}^{(2)} = \frac{4mn\pi D}{(m+n)R^2} \cdot \begin{cases} \frac{16}{1-\nu} & m=n=1 \\ (1-\nu)(m^2-2m-1)+4+ \\ \quad \frac{[m+3+(1-m)\nu]^2}{(1-\nu)} & m=n \neq 1 \\ -(m-1)[n+3+(1-n)\nu] & m=n+2 \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \quad (4.27)$$

表 4.1 奇异元刚度矩阵子矩阵  $[K^{(1)}]$  (对应于对称模式)

$\frac{D}{R^2}$	$\frac{(29+6\nu-3\nu^2)\pi}{2(1-\nu)}$	$\frac{16(1+\nu)\pi}{1-\nu}$	$\frac{3(45-10\nu-3\nu^2)\pi}{2(1-\nu)}$	$\frac{16(1+\nu+\nu^2)\pi}{1-\nu}$	$\frac{5(69-42\nu+5\nu^2)\pi}{2(1-\nu)}$
	$-\frac{64(1+\nu)(2+3\nu)}{15(1-\nu)}$	$-\frac{64(1+\nu)(2+\nu)}{5(1-\nu)}$	$-\frac{128(2+29\nu-\nu^2)}{35(1-\nu)}$	$-\frac{128(2+11\nu-3\nu^2)}{9(1-\nu)}$	$\frac{64(110-413\nu+93\nu^2)}{77(1-\nu)}$
	$3(1+\nu)\pi$	0	0	0	
	$-\frac{128(2-17\nu+\nu^2)}{105(1-\nu)}$	$\frac{320(2+\nu-\nu^2)}{21(1-\nu)}$	$\frac{64(126-215\nu+19\nu^2)}{105(1-\nu)}$		
	$-\frac{5(7+\nu)\pi}{4}$	$12(1+\nu)\pi$			
	$-\frac{64(42-19\nu-5\nu^2)}{105(1-\nu)}$				

对称

表 4.2 奇异元刚度矩阵子矩阵  $[K^{(2)}]$  (对应于反对称模式)

$\frac{D}{R^2}$	$\frac{(17+14\nu+\nu^2)\pi}{2(1-\nu)}$	$\frac{32\pi}{1-\nu}$	$\frac{3(9+14\nu+9\nu^2)\pi}{2(1-\nu)}$	$\frac{16(7-3\nu)\pi}{1-\nu}$	$\frac{5(9-2\nu+25\nu^2)\pi}{2(1-\nu)}$
	$-\frac{128(3+2\nu)}{15(1-\nu)}$	$-\frac{128(1+2\nu)}{5(1-\nu)}$	$-\frac{256(5+11\nu-\nu^2)}{35(1-\nu)}$	$\frac{256(1-7\nu+\nu^2)}{9(1-\nu)}$	$\frac{128(1-168\nu+62\nu^2)}{77(1-\nu)}$
	$-3(1+\nu)\pi$	0	0	0	
	$\frac{256(5+\nu+\nu^2)}{105(1-\nu)}$	$\frac{640(1-2\nu)}{21(1-\nu)}$	$\frac{128(33+40\nu-38\nu^2)}{105(1-\nu)}$		
	$\frac{5(6+3\nu)\pi}{4}$	$-24\pi$			
	$\frac{128(9-8\nu-10\nu^2)}{105(1-\nu)}$				

对称

### § 4.3 裂纹尖端奇异元与常规单元的连接

裂纹尖端奇异元与周围常规单元可以由多种方法实现连接。下面介绍利用位于奇异元边界的常规元节点上,两单元的挠度和转角相等的条件,导出一个常规单元的变换矩阵,以实现此常规单元与奇异元之间的连接的方法,并以常应变三角形单元为例来说明具体步骤。

三角形常应变板弯曲单元的节点位移包括节点挠度与节点处中面法线在直角坐标下的转角  $\psi_x$  和  $\psi_y$ 。奇异单元采用的是极坐标,因此要进行坐标变换。板的转角很微小,服从矢量运算法则。由图4.2中的几何关系容易得到

$$\begin{cases} \psi_x = \psi_r \cos \theta - \psi_\theta \sin \theta \\ \psi_y = \psi_r \sin \theta + \psi_\theta \cos \theta \end{cases} \quad (4.28)$$

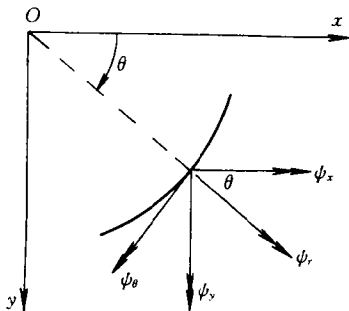


图4.2 转角的坐标变换

其中  $\psi_r$  和  $\psi_\theta$  能够由对式(4.1)的微分获得

$$\begin{cases} \psi_r = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{i}{2}} [a_i F_i(\theta) + b_i G_i(\theta)] - \frac{a_0}{R} \sin \theta + \frac{b_0}{R} \cos \theta \\ \psi_\theta = -\frac{\partial w}{\partial r} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{i}{2} + 1 \right) \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{i}{2}} [-a_i F_i(\theta) - b_i G_i(\theta)] - \frac{a_0}{R} \cos \theta - \frac{b_0}{R} \sin \theta \end{cases} \quad (4.29)$$

假设一个常应变三角形单元的节点,例如节点  $j$  在奇异元边

界上(参见图4.1)。利用式(4.1),(4.28)和(4.29),能够得出节点  $j$  的位移列向量与奇异元的广义位移列向量之间的关系

$$\begin{Bmatrix} w_j \\ \psi_{xj} \\ \psi_{yj} \end{Bmatrix} = [\Omega_j] \{\delta\} \quad (4.30)$$

其中  $\{\delta\}$  是由式(4.10)所给出的广义位移列向量,矩阵  $[\Omega_j]$  为

$$\begin{bmatrix} f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \dots, f_N^{(1)}, f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, \dots, f_N^{(2)}, 1, \cos \theta_j, \sin \theta_j \\ g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, \dots, g_N^{(1)}, g_1^{(2)}, g_2^{(2)}, \dots, g_N^{(2)}, 0, 0, 1/R \\ h_1^{(1)}, h_2^{(1)}, \dots, h_N^{(1)}, h_1^{(2)}, h_2^{(2)}, \dots, h_N^{(2)}, 0, -1/R, 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

其中

$$\begin{cases} f_s^{(1)} = F_s(\theta_j) \\ f_s^{(2)} = G_s(\theta_j) \end{cases} \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (4.32)$$

$$\begin{cases} g_s^{(1)} = \frac{1}{R} [F'_s(\theta_j) \cos \theta_j + (\frac{s}{2} + 1) F_s(\theta_j) \sin \theta_j] \\ g_s^{(2)} = \frac{1}{R} [G'_s(\theta_j) \cos \theta_j + (\frac{s}{2} + 1) G_s(\theta_j) \sin \theta_j] \end{cases} \quad (4.33)$$

$$s = 1, 2, \dots, N$$

$$\begin{cases} h_s^{(1)} = \frac{1}{R} [F'_s(\theta_j) \sin \theta_j - (\frac{s}{2} + 1) F_s(\theta_j) \cos \theta_j] \\ h_s^{(2)} = \frac{1}{R} [G'_s(\theta_j) \sin \theta_j - (\frac{s}{2} + 1) G_s(\theta_j) \cos \theta_j] \end{cases} \quad (4.34)$$

$$s = 1, 2, \dots, N$$

对于节点  $j$  在奇异元边界的常应变三角形元  $ijk$ (图4.1),设节点位移矢量为

$$\{\delta\}^e = [w_i, \psi_{xi}, \psi_{yi}, w_j, \psi_{xj}, \psi_{yj}, w_k, \psi_{xk}, \psi_{yk}]^T \quad (4.35)$$

在用奇异元广义位移矢量取代节点  $j$  的位移分量后,此常应变三角形元的广义节点位移矢量为

$$\{\hat{\delta}\}^e = [w_i, \psi_{xi}, \psi_{yi}, w_k, \psi_{xk}, \psi_{yk}, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N, w_0, a_0, b_0]^T \quad (4.36)$$

利用式(6.31)给出的矩阵 $[\Omega_j]$ ,能够建立 $\{\delta\}^e$ 与 $\{\hat{\delta}\}^e$ 的关系

$$\{\delta\}^e = [\Omega] \{\hat{\delta}\}^e \quad (4.37)$$

其中变换矩阵 $[\Omega]$ 为

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} [I] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\Omega_j] \\ 0 & [I] & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 3 \text{ 行} \\ 3 \text{ 行} \\ 3 \text{ 行} \end{array} \quad (4.38)$$

3 列      3 列       $2N + 3$  列

$I$ 是三阶单位矩阵。

按同样的推导可以知道,如果常应变三角形板元 $ijk$ 有两个节点 $j$ 和 $k$ 在奇异元边界上, $\{\delta\}^e$ 仍由式(4.35)表示, $\{\hat{\delta}\}^e$ 改变为

$$\{\hat{\delta}\}^e = [w_1, \psi_{x1}, \psi_{y1}, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N, w_0, a_0, b_0]^T \quad (4.39)$$

变换矩阵 $[\Omega]$ 改变为

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} [I] & 0 \\ 0 & [\Omega_j] \\ 0 & [\Omega_k] \end{bmatrix} \begin{array}{l} 3 \text{ 行} \\ 3 \text{ 行} \\ 3 \text{ 行} \end{array} \quad (4.40)$$

3 列       $2N + 3$  列

如所熟知,常规单元的应变能也能写成式(4.18)的形式

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^{eT} [K] \{\delta\}^e \quad (4.41)$$

其中 $[K]^e$ 是对应于常规元节点位移矢量 $\{\delta\}^e$ 的单元刚度矩阵。将式(4.37)代入(4.41),得到

$$U = \frac{1}{2} \{\hat{\delta}\}^{eT} [\Omega]^T [K]^e [\Omega] \{\hat{\delta}\}^e \quad (4.42)$$

令

$$[\hat{K}]^e = [\Omega]^T [K]^e [\Omega] \quad (4.43)$$

显然,  $[K]^r$  是与奇异元相邻的常规单元在奇异元边界上的节点位移分量由奇异元的广义位移分量替代后, 所对应的单元刚度矩阵。容易看出, 在形成总刚度矩阵时,  $[K]^r$  与奇异元刚度矩阵  $[K]^*$ 、与其它常规元刚度矩阵  $[K]^e$  都能按照标准有限元步骤, 按“对号入座”的原则进行装配。在总位移矢量中(包括常规元的位移矢量和奇异元的广义位移矢量), 位于奇异元边界的常规元节点位移不出现。

如果构造的裂纹尖端奇异单元为其它形状, 例如常用到的矩形单元, 那么一般地说, 计算奇异元刚度矩阵时需要采用数值积分。由于被积函数中  $r$  与  $\theta$  是变量分离的, 容易由解析法完成对  $r$  的积分。这样将数值积分从二维化成一维, 消除了被积函数的奇异性, 从而有效地减少计算工作量和提高精度。

在奇异元刚度矩阵及与之相邻的常规元的过渡单元刚度矩阵建立后, 分析工作就按常规有限元步骤进行, 不再赘述。

#### § 4.4 解析法与数值法的结果比较与讨论

第三章采用复变函数方法, 获得了一系列含裂纹 Kirchhoff 板弯曲问题的解析解。由于所用的力学模型是无限板, 也就是没有考虑外边界的影响, 应用中需要了解它对解的影响的大小。本章介绍的局部-整体法, 可以用于分析各种复杂的含裂纹有限尺寸板。应用中则需要了解奇异元的尺寸、阶数、解的精度及数值稳定性等问题。下面通过典型算例的解析与数值结果的比较来研究这些问题<sup>[21,50]</sup>。

##### 1. 典型算例及数值结果比较

图4.3为6块含长  $2a$  的中心裂、边长为  $l$  的方板, 代表6种典型的弯曲受力情况。取材料的泊松比  $\nu=0.3$ , 边长  $l=4a$  到  $l=20a$ , 由局部-整体法对弯曲 I 型和 II 型应力强度因子的计算结果及与相应无限板的解析结果的比较列于表4.3和4.4中。

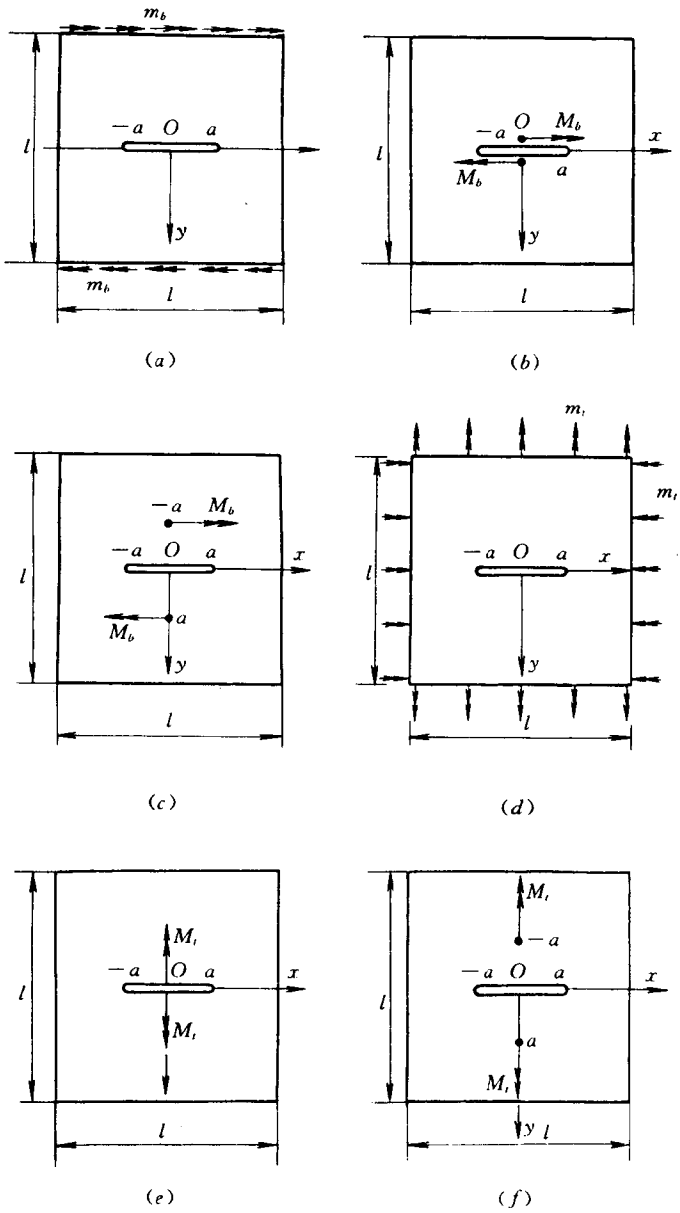


图4.3 中心裂纹板的6种加载情形

表4.3 中心裂纹板弯曲应力强度因子  $K_1$ 

问题图	局部-整体法解答						解析解	乘子
	$l=4a$	$l=6a$	$l=8a$	$l=12a$	$l=16a$	$l=20a$		
图4.3(a)	6.84	6.41	6.25	6.16	6.12	6.11	6	$m_b \sqrt{\pi a} / h^2$
图4.3(b)	2.51	2.21	2.12	2.06	2.04	2.03	1.91	$\sqrt{\pi} M_b / (\sqrt{a} h^2)$
图4.3(c)	1.88	1.43	1.28	1.18	1.15	1.13	1.11	$\sqrt{\pi} M_b / (\sqrt{a} h^2)$

表4.4 中心裂纹板弯曲应力强度因子  $K_2$ 

问题图	局部-整体法解答					解析解	乘子
	$l=4a$	$l=6a$	$l=8a$	$l=12a$	$l=20a$		
图4.3(d)	6.84	6.28	6.16	6.09	6.00	6	$m_t \sqrt{\pi a} / h^2$
图4.3(e)	2.43	2.12	2.02	1.96	1.92	1.91	$\sqrt{\pi} M_t / (\sqrt{a} h^2)$
图4.3(f)	2.23	1.86	1.74	1.66	1.61	1.59	$\sqrt{\pi} M_t / (\sqrt{a} h^2)$

图4.4则为4块含双边裂纹,边长为  $l$  的方板,代表4种典型的受力情况。两半板间未开裂部分长  $2a$ 。亦取材料泊松比  $\nu=0.3$ 。边长  $l=4a$  到  $l=20a$ 。计算结果及比较列于表4.5和表4.6中。

表4.5 双边裂纹板弯曲应力强度因子  $K_1$ 

问题图	局部-整体法解答							解析解	乘子
	$l=4a$	$l=6a$	$l=8a$	$l=10a$	$l=12a$	$l=16a$	$l=20a$		
图4.4(a) <sup>①</sup>	1.543	1.598	1.608	1.610	1.611	1.612	1.612	1.587	$\frac{\sqrt{\pi} M_b}{h^2 \sqrt{a}}$
图4.4(b) <sup>②</sup>	2.499	2.282	2.226	2.256	2.255	2.254	2.254	2.205	
图4.4(c) <sup>②</sup>	4.376	3.680	3.543	3.488	3.460	3.432	3.420	3.308	
① $\nu_0 = a$ 。									
② $b = 2a$ 。									



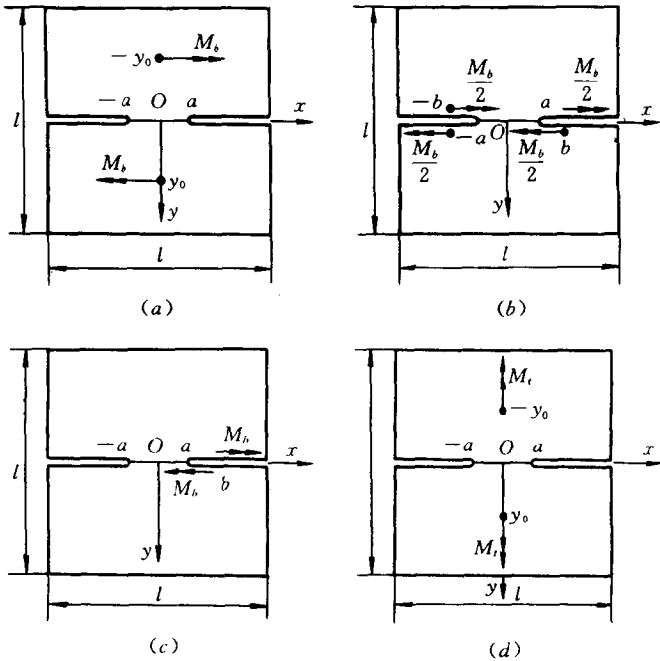


图4.4 双边裂纹板的4种加载情形

表4.6 双边裂纹板弯曲应力强度因子  $K_2$

问题图	局部-整体法解答							解析解	乘子
	$l=4a$	$l=6a$	$l=8a$	$l=10a$	$l=12a$	$l=16a$	$l=20a$	$l=\infty$	
图4.4(d) <sup>①</sup>	1.011	1.058	1.071	1.074	1.076	1.077	1.077	1.114	$\frac{\sqrt{\pi} M_t}{h^2 \sqrt{a}}$
① $b=2a$ .									

对图4.3和4.4采用局部-整体法计算时,根据对称性取四分之一板计算,取裂纹尖端奇异元半径  $R=0.5a$ ,阶数  $N=6$ ,奇异元边界(半个圆周)等距离设置21个常应变三角形元的节点。对于  $l=20a$  的板,在奇异元外部设置108个常应变三角形元<sup>[32,75]</sup>的节点。对于  $l=4a$  的板,在奇异元外部设置47个常应变三角形元的

节点。

## 2. 几点结论

由上述算例的数值与解析结果的比较以及进一步的数值计算与研究,可以得出下述几点结论:

### (1) 关于奇异元的尺寸与精度

采用有限单元法计算断裂力学问题的精度,取决于所假定的位移模式模拟真实变形的能力。采用裂纹尖端位移场的精确展开式作位移模式构造裂纹尖端高阶奇异元,是一种有效方法。它避免了普通多项式单元在裂纹尖端稠密的网格划分,能够直接由所得展开式系数的首项计算应力强度因子等重要断裂参数,有效地降低了计算工作量并提高了计算精度。

奇异元尺寸与所取位移展开式项数或者说奇异元的阶数相关。设板的内部裂纹长 $2a$ ,边裂纹长 $a$ ,较长的双边裂纹未开裂的韧带为 $2a$ 。取位移展开式的首项构造奇异元位移模式,则它仅能在裂纹尖端邻近的小范围内较精确地模拟真实变形,据经验,奇异元的半径 $R < 0.1a$ 才会有较高精度。所取的位移展开式的项数越多,或者说奇异元阶数越高,它能较精确地模拟真实变形的区域就越大,奇异元的半径也就能取得更大。不过无论奇异元阶数取得多高,它也无法较精确反映另一个应力奇异区域或应力突变区域(例如另一个裂纹尖端或集中载荷点)的真实变形与应力,因此也没有必要将奇异元阶数取得过高。根据计算经验,取奇异元阶数 $N=6\sim 8$ ,相应奇异元半径 $R=0.5\sim 0.6a$ 是较为合适的。

### (2) 关于奇异元与常规单元的连接

可以有多种方法与手段实现奇异元与周围常规单元的连接。本章中的算例都是利用二者界面上若干节点位移参数相等的条件来实现的,虽然没有解的收敛性的严格数学证明,但计算结果表明了这个方法的高精度和数值稳定性。

### (3) 关于有限尺寸板的边界的影响

实际工程中的板是有限尺寸板,第三章所求得解析解的力学模型是无限大板。必须研究有限尺寸板的边界的影响。从表4.3

~4.6可以看出,当边长  $l=20a$  时,由局部-整体法的数值结果与无限大板的解析结果相比,相差一般小于3%,这在有限元法的精度范围之内,表明可以不计边界的影响(有一例二者相差6%,是由于集中载荷离裂纹尖端太近的缘故,必须加密网格以提高精度)。由进一步的计算与研究可以得出经验估计:当内部裂纹尖端距最近的边界的距离大于裂纹长的3~5倍时,当双边裂纹板每条裂纹之长为未开裂韧带的1.2~2倍时,就可以忽略边界的影响,采用无限板的力学模型。

## § 4.5 两共线半无限裂纹问题的定解条件 及解的实用价值

在板弯曲与平面问题中,两共线半无限裂纹的理想力学模型引出了几个有趣的理论与实际问题。以往文献没有阐明这些问题。特别对于两共线半无限裂纹的平面问题,由于理论分析的错误,导致收录在国内外通用的几本重要工程手册<sup>[3~5]</sup>中一类应力强度因子公式的错误。蒋持平<sup>[17,18,21,78]</sup>从理论上阐明了这些问题,所推导的正确公式已载入新版应力强度因子手册<sup>[7]</sup>,取代旧的经典结果。

### 1. 定解条件

第三章曾指出,对于图3.11所示含两共线半无限裂纹板的弯曲问题,为了完全确定问题的解,必须提出补充条件(3.149)和(3.150),即给定其未开裂韧带(板的内部)上内力的合力矩分量  $M_x^R$  和  $M_y^R$ ,合剪力  $V^R$ 。由无限板的理想模型,不容易理解为什么要提这两个补充条件,也难以确定  $M_x^R, M_y^R$  和  $V^R$ 。如果考虑到两共线半无限裂纹板是边裂纹较长的双边裂纹板(例如双边裂纹试件)的抽象,则问题可以迎刃而解。例如为确定图4.5(a)所示双边裂纹板的未开裂韧带上的  $M_x^R, M_y^R$  和  $V^R$ ,如图4.5(b),设想将上半板截出,则由静力平衡条件立即得出

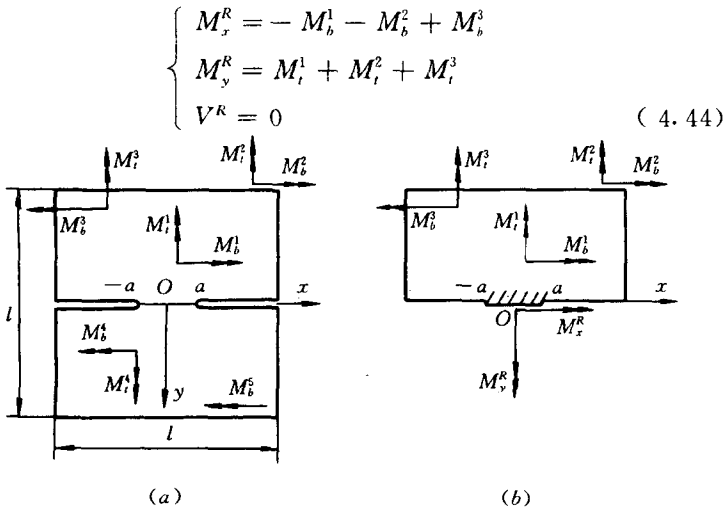


图4.5 板切带上的内力与外载的平衡关系

当然也可以由下半板的静力平衡条件得到  $M_x^R, M_y^R$  和  $V^R$ 。由全板的静力平衡, 这样得到的结果完全与式(4.44)相等。显然, 给定  $M_x^R, M_y^R$  和  $V^R$  等价于给定每个半板上所有外载(包括近处与远处外载)的主矢和主矩。这样, 指定补充条件(3.149)和(3.150)可以理解为给定沿连接线割开后的半无限板在近处和无穷远的全部外载的主矢和主矩。

现在与含有限长裂纹的无限板作一对照。参考图4.6, 假想沿

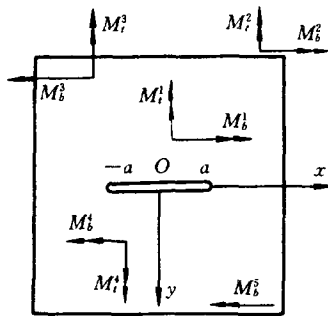


图4.6 含有限长裂纹的板

裂纹线将板截开,同样可以得到式(4.44)。所不同的是,当板变为无穷大时,由式(4.44)表示的合(内)力偶是分布在无限长连接韧带上,当外载(如图4.6中的 $M_b^2, M_t^2, M_b^3$ 和 $M_t^3$ )远离裂纹时,这些外载在裂纹附近引起的应力场就逐渐变小而趋于零,可以不予考虑,因此不需要提类似于式(3.149)与(3.150)的补充条件。

## 2. 公式(3.205)的意义与应用

图3.18(a)给出了两共线半无限裂纹板的一种特殊受力状态,即裂纹尖端近场无外载,连接韧带上内力合弯矩与合扭矩分别为 $M_b^R$ 和 $M_t^R$ 。公式(3.205)给出了这个问题的I型和II型应力强度因子。为了说明公式(3.205)的意义与应用,研究图4.4所示双边裂纹板,并在有限元计算中取 $l=20a$ 以模拟无限板。表4.7~4.10列出了当外载逐渐远离裂纹尖端时,应力强度因子的变化情况。它表明,随着载荷点与裂纹尖端的距离加大,所得结果趋于由公式(3.205)所给出的值。可见,在实用上,当载荷点离裂纹尖端较远时,就可以按公式(3.205)计算应力强度因子。

表4.7 应力强度因子 $K_I$ 随载荷位置变化(1)

方法	图4.4(a)裂纹尖端 $a$ 的应力强度因子 $K_I(\sqrt{\pi} M_b/(h^2 \sqrt{a}))$							
	$y_0=a$	$y_0=2a$	$y_0=3a$	$y_0=4a$	$y_0=6a$	$y_0=8a$	$y_0=10a$	$y_0=\infty$
有限元 解析解 式(3.205)	1.6118	1.8413	1.8870	1.8999	1.9080	1.9099	1.9095	
	1.5868	1.8278	1.8752	1.8910	1.9017	1.9053	1.9069	
	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099	
①有限元计算中,取边长 $l=20a$ 。表6.8~6.10中的有限元计算亦与之相同。								

表4.8 应力强度因子 $K_I$ 随载荷位置变化(2)

方法	图4.4(b)裂纹尖端 $a$ 应力强度因子 $K_I(\sqrt{\pi} M_b/(h^2 \sqrt{a}))$							
	$b=2a$	$b=3a$	$b=4a$	$b=6a$	$b=8a$	$b=10a$	$b=20a$	$b=\infty$
有限元 解析解 式(3.205)	2.2536	2.0429	1.9803	1.9486	1.9374	1.9343		
	2.2053	2.0257	1.9725	1.9370	1.9250	1.9195		
	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099		

表4.9 应力强度因子  $K_1$  随载荷位置变化(3)

方法	图4.4(c)裂纹尖端 $a$ 应力强度因子 $K_1(\sqrt{\pi} M_b/(h^2 \sqrt{a}))$							
	$b=2a$	$b=3a$	$b=4a$	$b=6a$	$b=8a$	$b=10a$	$b=20a$	$b=\infty$
有限元	3.4192	2.7724	2.5212	2.3537	2.2842	2.2615		
解析解	3.3079	2.7009	2.4656	2.2598	2.1656	2.1114	2.0078	1.9099
式(3.205)	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099

表4.10 应力强度因子  $K_2$  随载荷位置变化

方法	图4.4(d)裂纹尖端 $a$ 应力强度因子 $K_2(\sqrt{\pi} M_l/(h^2 \sqrt{a}))$							
	$y_0=a$	$y_0=2a$	$y_0=3a$	$y_0=4a$	$y_0=6a$	$y_0=8a$	$y_0=10a$	$y_0=\infty$
有限元	1.0771	1.5953	1.7548	1.8229	1.8758	1.8938	1.9017	
解析解	1.1141	1.5887	1.7484	1.8147	1.8661	1.8849	1.8938	1.9099
式(3.205)	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099	1.9099

理论上,公式(3.205)反映了一个推广的 St. Venant 原理:如果将无穷远看作一个点,那么无穷远点附近(离裂纹尖端较远的广大区域)的载荷对其“远处”(即裂纹尖端附近的区域)的影响,完全可以由它的主矢和主矩确定。

### 3. 两共线半无限裂纹的平面问题

与板弯曲问题类似,对于两共线半无限裂纹的平面问题同样必须补充未开裂韧带上内力合力的主矢和主矩的条件(参见图4.7的  $P_R, Q_R$  和  $M_R$ )。这类问题是由国际著名力学家 Erdogan<sup>[76,77]</sup> 首先研究的。由于他漏掉了连接韧带上这一重要的定解条件,得出了不正确的结果。多年来,国际国内几本重要的工程手册<sup>[3~5]</sup> 采用了他的不正确的应力强度因子公式。蒋持平<sup>[17,18,78]</sup> 在重新研究这类问题后,补充了连接韧带上定解条件,并且首先指出,对于这样一类重要的应力边值问题,上、下两半板的复应力函数  $\Phi(z)$  中虚常数之差  $iC$  通过求解 Riemann-Hilbert 问题与应力场相关,同时阐明了这个虚常数与另一个复常数应由未开裂韧带上内力合力的主矢和主矩确定,从而完整地解决了这类问题。所得出的相应应

力强度因子的正确公式已收录于科学出版社新增订出版的《应力强度因子手册》(增订版)<sup>[7]</sup>中,取代了旧的经典公式。理论的、数值的和实验的结果对照说明了新公式的正确性和实用价值。下面由一简例来说明新旧公式的区别。

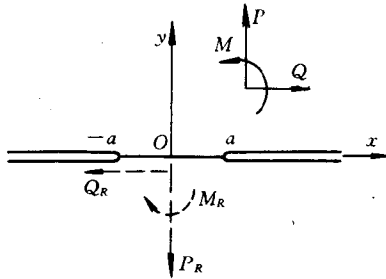


图4.7 两共线半无限裂纹的平面问题

如图4.8所示双边裂纹板,未开裂韧带长 $2a$ ,取板的边长为 $20a$ ,则双边裂纹已长到可以将它抽象为共线半无限裂纹。设在一条边裂纹上下面作用一对使裂纹张开的拉力 $P$ ,根据旧的经典公

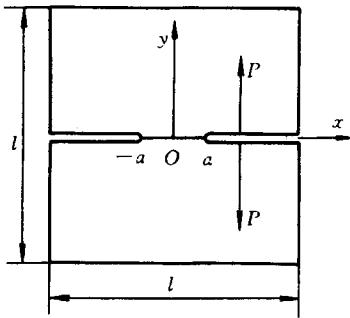


图4.8 平面应力状态下的双边裂纹板

式<sup>[3~5]</sup>,裂纹尖端 $a$ 的张开型应力强度因子公式 $K_I$ 为

$$K_I = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \quad (4.45)$$

新的正确公式则为

$$K_1 = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \left[ \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} + \frac{2\sqrt{b^2-a^2}}{a} \right] \quad (4.46)$$

可以看出,新公式较之旧公式增加了一个附加项,并且经常是起主要作用的项。由旧公式、新公式和有限元法所得结果列于表4.11中。结果显示,新公式与有限元结果吻合很好,而旧公式连变化规律都不对。

表4.11 双边裂纹板张开型应力强度因子结果比较

方法	图4.8 裂纹尖端 $a$ 张开型应力强度因子 $K_1(P/\sqrt{a})$							
	$b=1.1a$	$b=1.4a$	$b=1.6a$	$b=2a$	$b=3a$	$b=4a$	$b=5a$	$b=10a$
旧公式	2.59	1.38	1.17	0.97	0.79	0.72	0.69	0.62
新公式	3.10	2.48	2.58	2.93	3.98	5.09	6.21	11.85
有限元 <sup>(1)</sup>			2.60	2.89	3.89	4.96	6.05	11.52
①有限元计算中,取 $l/a=20$ 。								



## 第五章 Reissner 型平板理论及两种 平板理论比较

采用 Reissner 型板壳理论比采用 Kirchhoff 板壳理论研究含裂纹板壳更具科学性。本章将介绍 Reissner 型平板理论的基本概念和公式,并将两种平板理论作一比较。

### § 5.1 Reissner 型板的基本假定

Reissner<sup>[79,80]</sup>首先研究计及横向剪切变形的各向同性板的弯曲问题,以后一些学者又提出了几种稍有区别的理论。在 Reissner 的理论中还考虑了横向正应变  $\epsilon_z$  的影响。由于  $\epsilon_z$  的影响通常不大,本书将忽略它。

为了计入板内横向剪切变形的作用,Reissner 型板理论对 Kirchhoff 板理论的基本假定进行了修改。Reissner 型板理论的基本假定为

①变形前垂直于中面的直线段,在变形后仍保持直线,且其长度方向的变形可以略去,但不假设它仍垂直于变形后的中面。

②中面内的点无面内位移。

③平行于中面的各层互不挤压。

对照 § 2.1 节,可知 Reissner 型板的基本假定仅修改了经典薄板理论的基本假定①,放松了变形前垂直于中面的直线段在变形后仍垂直于已变形中面的要求,从而容许了板在某种平均意义上的横向剪切变形。

下面根据 Reissner 型板的基本假定,对板的变形进行数学描述:

如图5.1所示, 直线段  $AB$  过未变形板的中面内一点  $H$  且垂直于此中面。根据假设②, 变形后点  $H$  将垂直下移到  $H'$ 。设直线段  $A'B'$  过点  $H'$  且垂直于变形后的中面, 那么  $A'B'$  相对于  $AB$  在  $Oxz$  投影平面内的转角为  $\partial w / \partial x$ 。考虑板的横向剪切变形, 直线段  $AB$  在变形后实际成为曲线段(图中用虚线表示)。Reissner 型板理论按取某种平均角位移的方式将此曲线段用直线段  $A''B''$  代替。设在  $Oxz$  平面内, 线段  $A''B''$  相对于  $AB$  的转角为  $\psi_x$ , 相对于  $A'B'$  的转角为  $\gamma_x$ , 那么

$$\gamma_x = \psi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5.1)$$

同样地在  $Oyz$  平面内可以得到

$$\gamma_y = \psi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \quad (5.2)$$

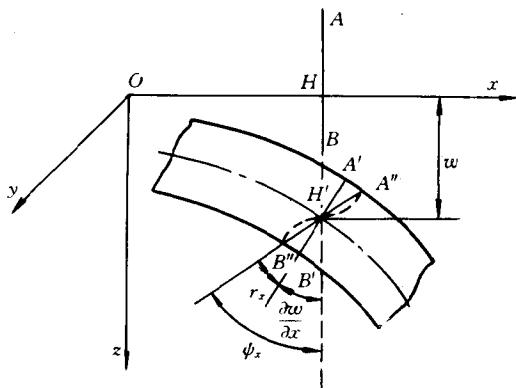


图5.1 Reissner 型板的变形

由以上的变形分析可以看出, Reissner 型板的变形可以用三个独立的广义位移分量描述: 即中面挠度  $w$ , 变形前垂直于中面的直线段分别在  $Oxz$  与  $Oyz$  平面内的转角  $\psi_x$  和  $\psi_y$ 。由于所研究的仍为小变形, 板内任意一点的直角坐标位移分量  $u$ 、 $v$  和  $w$  能够由这三个广义位移分量表示为

$$\begin{cases} u(x, y, z) = -z\psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = -z\psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad (5.3)$$

显然,如果忽略板的横向剪切变形,即令  $\gamma_x = \gamma_y = 0$ ,那么由式(5.1)和(5.2)

$$\psi_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \psi_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (5.4)$$

独立的位移分量只剩下  $w$ , Reissner 型板的位移表达式(5.3)退化为 Kirchhoff 经典薄板的位移表达式(2.1)。

## § 5.2 Reissner 型板的基本公式与平衡微分方程

利用位移表达式(5.3),可以求得 Reissner 型板在直角坐标系下的应变分量为

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \end{cases} \quad (5.6)$$

与薄板理论一样,从基本假定③可以得出:

$$\sigma_z = 0 \quad (5.7)$$

于是联系板的三个面内应变分量与三个面内应力分量的弹性力学物理方程成为

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \quad (5.8)$$

其中  $E$  是杨氏模量,  $\nu$  是泊松比。由式(5.5)和(5.8), 容易求得板的三个面内应力分量与两个广义位移分量之间的关系式

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right) \\ \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y} + \nu\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\right) \\ \tau_{xy} = -\frac{Ez}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right) \end{cases} \quad (5.9)$$

从式(5.9)可以看出, 与经典薄板理论一样, 这三个应力分量沿板厚为线性分布(参见图2.3), 于是横截面上的弯矩  $M_x$  和  $M_y$ , 扭矩  $M_{xy}$  能够用广义位移分量表达为:

$$\begin{cases} M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right) \\ M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y} + \nu\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\right) \\ M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -\frac{1}{2}D(1-\nu)\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right) \end{cases} \quad (5.10)$$

其中  $D$  为板的弯曲刚度

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5.11)$$

$h$  为板厚。

比较式(5.9)与(5.10), 可以得出板的面内应力分量与内力分量之间的关系

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{h^3}, \sigma_y = \frac{12M_y z}{h^3}, \tau_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{h^3} \quad (5.12)$$

下面研究板的横向剪应力  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  与横向剪力  $Q_x, Q_y$ 。注意到

式(5.7)并将垂直于板面的载荷  $q(x, y)$  换为沿厚度均匀分布的体力  $q(xy)/h$  (此种变换仅显著影响最次要的应力分量  $\sigma_z$ ), 板的三维弹性力学平衡方程可以写为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - \frac{q}{h} = 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

将式(5.9)代入式(5.13)的第一个方程, 得到

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = zI(x, y) \quad (5.14)$$

其中

$$I(x, y) = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \quad (5.15)$$

在板面没有切向载荷的情况下,  $\tau_{xz}$  在板面为零

$$\tau_{xz} |_{z=\pm h/2} = 0 \quad (5.16)$$

将式(5.14)对  $z$  积分, 并应用条件(5.16), 得到

$$\tau_{xz} = \frac{4z^2 - h^2}{8} I(x, y) \quad (5.17)$$

板在横截面上的剪力  $Q_x$  可以由  $\tau_{xz}$  对板厚的积分获得

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = -\frac{h^3}{12} I(x, y) \quad (5.18)$$

比较式(5.17)和(5.18), 得到

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2h^3} (h^2 - 4z^2) Q_x \quad (5.19)$$

可见,  $\tau_{xz}$  沿横截面的分布为抛物线。参见图5.1, 在板的横向剪应力影响下, 变形前垂直于中面的直线段  $AB$ , 在变形后变为与中面斜交的曲线。根据剪切 Hooke 定律, 其剪应变  $\tilde{\gamma}_{xz}$  为

$$\tilde{\gamma}_{xz} = \frac{3}{2Gh^3} (h^2 - 4z^2) Q_x \quad (5.20)$$

其中  $G$  为剪切弹性模量

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5.21)$$

Kirchhoff 经典薄板理论完全忽略了剪应变  $\tilde{\gamma}_{xz}$ , Reissner 型板理论则考虑了剪应变  $\tilde{\gamma}_{xz}$  沿厚度的某种平均值  $\gamma_{xz}$ 。参见图 5.1, Kirchhoff 平板理论由仍垂直于变形后板中面的线段  $A'B'$  代替  $AB$  的真实变形曲线(虚线表示), Reissner 型平板理论则选用能够最佳逼近真实变形曲线的直线段  $A''B''$ 。显然

$$\gamma_{xz} = -\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \quad (5.22)$$

这样, 较之 Kirchhoff 平板理论, Reissner 型板理论的适用范围从薄板扩大到了中厚板; 对于自由边界, 能够满足全部内力边界条件。

本书研究的是板的线弹性问题, 剪力  $Q_x$  应当与平均剪应变  $\gamma_{xz}$  成正比

$$Q_x = C \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) \quad (5.23)$$

其中  $C$  称为板的横向剪切变形刚度。下面利用能量等效的原则来定义平均剪应变, 并确定横向剪切变形刚度  $C$  的大小。设剪应力  $\tau_{xz}$  对实际剪应变  $\tilde{\gamma}_{xz}$  与平均剪应变  $\gamma_{xz}$  所作的功大小相等, 即设

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \tilde{\gamma}_{xz} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \gamma_{xz} dz \quad (5.24)$$

那么将式(5.19)、(5.20)和(5.22)代入方程(5.24)便得到

$$Q_x = \frac{5}{6} Gh \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) \quad (5.25)$$

比较式(5.23)和(2.25), 得到

$$C = \frac{5}{6} Gh \quad (5.26)$$

可以从式(5.13)第二个方程出发, 按完全相同的方式研究剪应力  $\tau_{yz}$  和剪力  $Q_y$ 。最后得到 Reissner 型板的横向剪应力、剪力与板的广义位移之间的关系式

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{3}{2h^3}(h^2 - 4z^2)Q_x \\ \tau_{yz} = \frac{3}{2h^3}(h^2 - 4z^2)Q_y \end{cases} \quad (5.27)$$

$$\begin{cases} Q_x = C \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) \\ Q_y = C \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) \end{cases} \quad (5.28)$$

其中板的横向剪切刚度  $C$  已由式(5.26)给出。

Reissner 型板的以内力表示的平衡方程与 Kirchhoff 板的完全相同,既可以从三维弹性力学的平衡方程出发推导,也可以直接从图2.4所示板的微分块的平衡条件获得

$$\begin{cases} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

将 Reissner 型板的内力表达式(5.10)和(5.28)代入平衡方程(5.29),就得到 Reissner 型板的以广义位移分量表示的平衡微分方程

$$\begin{cases} D \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) + C \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) = 0 \\ D \left( \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \right) + C \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) = 0 \\ C \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + q = 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

### § 5.3 基本方程的简化

方程组(5.30)包含以  $w, \psi_x$  和  $\psi_y$  为基本未知量的三个方程,

较为复杂。胡海昌<sup>[81]</sup>曾将这组方程进行了简化,归并为求解两个函数的两个方程。

令  $\psi_x$  和  $\psi_y$  由另外两个函数  $F(x, y)$  和  $f(x, y)$  表示,其表示形式如下

$$\psi_x = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \psi_y = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \quad (5.31)$$

这种表示总是可能的,但不是唯一的。齐次方程

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_0}{\partial y} - \frac{\partial f_0}{\partial x} = 0 \quad (5.32)$$

是 Cauchy-Riemann 方程,有解存在,且其解可以用一个解析函数  $\varphi(x+iy)$  表示

$$f_0 + iF_0 = \varphi(x + iy) \quad (5.33)$$

若根据齐次方程(5.33)之解将  $F$  增加  $F_0$ ,  $f$  增加  $f_0$ , 不会改变  $\psi_x$  和  $\psi_y$  之值。

将式(5.31)代入(5.30)的前两个方程,得到

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}[D\nabla^2 F + C(\omega - F)] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{D}{2}(1 - \nu)\nabla^2 f - Cf\right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}[D\nabla^2 F + C(\omega - F)] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{D}{2}(1 - \nu)\nabla^2 f - Cf\right] = 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

其中  $\nabla^2$  为 Laplace 算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4.35)$$

将方程组(5.34)的方括号内的函数组合看作两个独立函数,那么此方程组又是一个 Cauchy-Riemann 方程,它的解可以由一个解析函数  $C\Phi(x+iy)$  表示,其中横向剪切刚度  $C$  只是为了表示的方便而添加的

$$\frac{D}{2}(1 - \nu)\nabla^2 f - Cf + i[D\nabla^2 F + C(\omega - F)] = C\Phi(x + iy) \quad (5.36)$$

这是  $F$ 、 $f$  和  $\omega$  的非齐次微分方程,它的解可以表示为任一特解与



相应的齐次方程通解之和。由于解析函数  $\Phi(x+iy)$  的实部和虚部都是调和函数,方程(5.36)的特解  $F_1, f_1$  和  $w_1$  可以取为

$$f_1 + iF_1 = -\Phi(x+iy), w_1 = 0 \quad (5.37)$$

而相应的齐次方程为

$$\begin{cases} \frac{D}{2}(1-\nu)\nabla^2 f - Cf = 0 \\ D\nabla^2 F + C(w - F) = 0 \end{cases} \quad (5.38)$$

特解(5.37)不产生挠度,同时由对式(5.33)的说明,它也不影响  $\psi_x$  和  $\psi_y$  的值,因此这组特解通常被略去,  $F, f$  和  $w$  被理解为满足齐次方程组(5.38)的函数。但是柳春图指出,上述结论是对函数的解析区域得出的,对于存在裂纹尖端这样的奇点的区域,为了满足裂纹面的边界条件,特解  $\Phi(x-iy)$  不能被略去。他的这一发现,解决了 Reissner 型板弯曲裂纹尖端场研究的一个关键性技术问题,使这项研究取得了重要进展。

为了进行 Reissner 型板裂纹尖端场的研究,将方程(5.36)的实部和虚部分开,得到

$$\nabla^2 f - 4k^2 f = 4k^2 \operatorname{Re}\Phi \quad (5.39)$$

$$w = F - \frac{D}{C}\nabla^2 F + \operatorname{Im}\Phi \quad (5.40)$$

其中  $\operatorname{Re}$  和  $\operatorname{Im}$  分别表示取函数的实部和虚部,而

$$k^2 = \frac{C}{2D(1-\nu)} = \frac{5}{2h^2} \quad (5.41)$$

将式(5.31)和(5.40)代入(5.30)第三个方程,得到

$$D\nabla^2\nabla^2 F = q \quad (5.42)$$

方程(5.39)、(5.40)和(5.42)等价于方程组(5.30),但是方程中各函数已经解耦,问题已经被简化为满足相应边界条件的关于函数  $F$  和  $f$  的两个基本方程(5.39)和(5.42)。在研究 Reissner 型板裂纹尖端场的一般展开式时,这两个解耦的方程会带来较大的便利。当然由于边界条件一般是耦合的,除了少数问题,这些方程仍然必须联立求解。

## § 5.4 边界条件

### 1. 斜截面上的内力

Reissner 型板在任意斜截面上的内力可以由两个坐标轴方向的内力表达。关于内力坐标变换的推导完全与 Kirchhoff 板的相同，有关表达式也同式(2.18)和(2.20)，即

$$\begin{cases} M_n = l^2 M_x + 2lm M_{xy} + m^2 M_y \\ M_s = m^2 M_x - 2lm M_{xy} + l^2 M_y \\ M_{ns} = -lm M_x + (l^2 - m^2) M_{xy} + lm M_y \end{cases} \quad (5.43)$$

$$\begin{cases} Q_n = lQ_x + mQ_y \\ Q_s = -mQ_x + lQ_y \end{cases} \quad (5.44)$$

其中  $l, m$  为边界法线的方向余弦，可参见式(2.19)。

转角  $\psi_n$  和  $\psi_s$  的坐标变换关系为

$$\begin{cases} \psi_n = l\psi_x + m\psi_y \\ \psi_s = -m\psi_x + l\psi_y \end{cases} \quad (5.45)$$

注意此处  $\psi_x$  和  $\psi_y$  分别表示板在变形前中面法线变形后在  $Oxz$  和  $Oyz$  平面内的转角，而不是指这两个(微小)转角以矢量表示时所指的方向(参见图5.2)。

### 2. 边界条件

Reissner 型板理论包括三个基本变量，三个两阶微分方程，每条边界要求三个边界条件。它的自由边内力边界条件可以全部满足。

Reissner 型板的边界条件可以归纳为以下几种情况

$$\begin{cases} w = \bar{w} \text{ 或 } Q_n = \bar{Q}_n \\ \psi_n = \bar{\psi}_n \text{ 或 } M_n = \bar{M}_n \\ \psi_s = \bar{\psi}_s \text{ 或 } M_{ns} = \bar{M}_{ns} \end{cases} \quad (5.46)$$

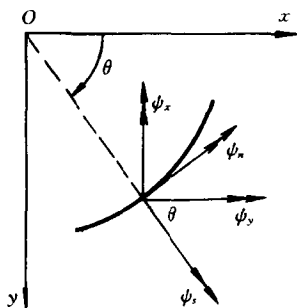


图5.2 转角的坐标变换关系

其中  $\bar{w}, \bar{\psi}_n, \bar{\psi}_s, \bar{Q}_n, \bar{M}_n$  和  $\bar{M}_{ns}$  均为边界上的已知函数。典型边界条件为

(1) 固支边

$$w = \bar{w}, \quad \psi_n = \bar{\psi}_n, \quad \psi_s = \bar{\psi}_s \quad (5.47)$$

(2) 第一种简支边

$$w = \bar{w}, \quad \psi_s = \bar{\psi}_s, \quad M_n = \bar{M}_n \quad (5.48)$$

(3) 第二种简支边

$$w = \bar{w}, \quad M_n = \bar{M}_n, \quad M_{ns} = \bar{M}_{ns} \quad (5.49)$$

(4) 自由边

$$M_n = \bar{M}_n, \quad M_{ns} = \bar{M}_{ns}, \quad Q_n = \bar{Q}_n \quad (5.50)$$

裂纹面为自由边界。通常在裂纹面  $\bar{M}_n, \bar{M}_{ns}$  和  $\bar{Q}_n$  等于零。

## § 5.5 极坐标下的基本公式与平衡微分方程

采用极坐标研究裂纹尖端场是方便的。图5.3所示的微板元可以用来推导极坐标下的平衡微分方程。

将图5.3中微板元  $ABCD$  各侧面上的内力和板面外载对  $AB$  轴取矩

$$(M_r + dM_r)(r + dr)d\theta - M_r r d\theta - (Q_r + dQ_r)(r + dr)d\theta dr + (M_{\theta r} + dM_{\theta r})dr - M_{\theta r} dr - M_{\theta} d\theta dr = 0 \quad (5.51)$$

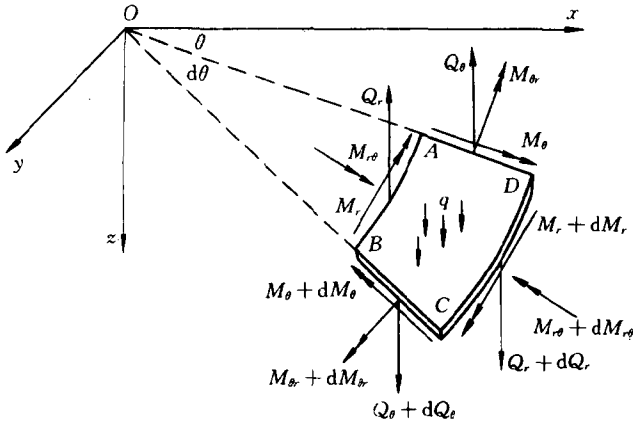


图5.3 极坐标下微板元的平衡

其中载荷  $q$ , 剪力  $Q_\theta$  对  $AB$  轴的矩是更高阶的微量, 没有列入。方程(5.51)经整理, 并略去高阶项得到

$$\frac{M_r - M_\theta}{r} + \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} - Q_r = 0 \quad (5.52)$$

同样地将各内力和外载对  $OA$  轴取矩和对  $z$  轴投影, 可以得到两个方程。最后可以写出极坐标下由内力表示的平衡方程

$$\begin{cases} \frac{M_r - M_\theta}{r} + \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} - Q_r = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2M_{r\theta}}{r} - Q_\theta = 0 \\ \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( Q_r + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \right) + q = 0 \end{cases} \quad (5.53)$$

将位移表达式(5.3)变换到极坐标下

$$\begin{cases} u_r(r, \theta, z) = -z\psi_r(r, \theta) \\ u_\theta(r, \theta, z) = -z\psi_\theta(r, \theta) \\ w(r, \theta, z) = w(r, \theta) \end{cases} \quad (5.54)$$

根据弹性理论, 在极坐标下的几何方程为

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \gamma_{r,\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \end{cases} \quad (5.55)$$

将式(5.54)代入(5.55),得到

$$\begin{cases} \epsilon_r = -z \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta = -z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} \right) \\ \gamma_{r,\theta} = -z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} \right) \end{cases} \quad (5.56)$$

因为极坐标系也是正交坐标系,弹性力学的物理方程在极坐标系与直角坐标系下具有相同的形式。将式(5.56)代入物理方程得到

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} \right) \right] \\ \sigma_\theta = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} + \nu \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \right] \\ \tau_{r,\theta} = -\frac{Ez}{2(1+\nu)} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} \right] \end{cases} \quad (5.57)$$

将式(5.57)两边乘以 $z$ ,并对 $z$ 从 $-h/2$ 到 $h/2$ 积分,求得极坐标下弯矩 $M_r$ , $M_\theta$ 和扭矩 $M_{r,\theta}$ 的表达式

$$\begin{cases} M_r = -D \left[ \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} \right) \right] \\ M_\theta = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} + \nu \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \right] \\ M_{r,\theta} = -\frac{1}{2}(1-\nu)D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} \right] \end{cases} \quad (5.58)$$

下面将式(5.28)变换到极坐标下,由于 $w$ 是标量函数,利用§2.5给出的坐标变换式。可以得到

$$\begin{cases} Q_r = C \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \psi_r \right) \\ Q_\theta = C \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi_\theta \right) \end{cases} \quad (5.59)$$

将式(5.58)和(5.59)代入方程(5.53),得到极坐标下以广义位移分量表示的平衡方程

$$\begin{cases} D \left[ \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial r} - \frac{\psi_r}{r^2} + \frac{1-\nu}{2r^2} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2r} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right] + C \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \psi_r \right) = 0 \\ D \left[ \frac{1+\nu}{2r} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1-\nu}{2r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1-\nu}{2r^2} \psi_\theta \right] + C \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi_\theta \right) = 0 \\ C \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \left( \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right) \right] + q = 0 \end{cases} \quad (5.60)$$

在§5.3中,利用式(5.31)对基本方程进行了简化。由于 $F$ 和 $f$ 都是标量函数,坐标变换更为方便。利用§2.5给出的坐标变换式,得到式(5.31)、(5.39)、(5.40)和(5.42)的极坐标形式为

$$\psi_r = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \psi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial r} \quad (5.61)$$

$$\nabla^2 f - 4k^2 f = 4k^2 \operatorname{Re} \Phi \quad (5.62)$$

$$w = F - \frac{D}{C} \nabla^2 F + \operatorname{Im} \Phi \quad (5.63)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 F = q \quad (5.64)$$

其中算子 $\nabla^2$ 和 $\nabla^2 \nabla^2$ 的极坐标形式为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (5.65)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (5.66)$$

## § 5.6 两种平板理论用于无裂纹板时的比较

### 1. Reissner 板理论的可适用性

1945年, Reissner<sup>[69,79]</sup>曾举了一个非常极端的例子来说明他的理论的可靠性。

如图5.4所示两端受自由扭转的矩形截面杆,长 $2l$ ,横截面尺寸 $a \times h$ 。Reissner 将它作为一块长 $2l$ ,宽 $a$  ( $l \gg a$ ),厚度为 $h$ 的矩形板求解。

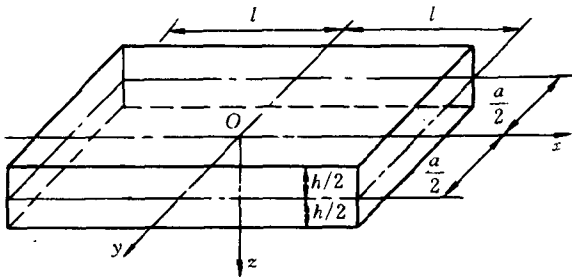


图5.4 由 Reissner 板理论分析受扭矩形截面杆

下面仅介绍 Reissner 的计算结果。

设板(杆)单位长度的扭角为 $\alpha$ ,则根据 Reissner 理论,板的位移和内力解答为

$$w = \alpha xy \quad (5.67)$$

$$\begin{cases} Q_x = (1 - \nu)D\alpha \frac{\sqrt{10}}{h} \cdot \frac{\text{sh}(\sqrt{10}y/h)}{\text{ch}[\sqrt{10}a/(2h)]} \\ M_{xy} = (1 - \nu)D\alpha \left\{ \frac{\text{ch}(\sqrt{10}y/h)}{\text{ch}[\sqrt{10}a/(2h)]} - 1 \right\} \\ M_x = M_y = Q_y = 0 \end{cases} \quad (5.68)$$

由此计算板(杆)中的应力

$$\begin{cases} \tau_{xy} = -2Gaz \left\{ 1 - \frac{\text{ch}(\sqrt{10}y/h)}{\text{ch}[\sqrt{10}a/(2h)]} \right\} \\ \tau_{xz} = Ga \cdot \frac{\sqrt{10}}{4h} \cdot \frac{\text{sh}(\sqrt{10}y/h)}{\text{ch}[\sqrt{10}a/(2h)]} (h^2 - 4z^2) \end{cases} \quad (5.69)$$

于是可知板(杆)中的最大剪应力为

$$\begin{cases} (\tau_{xy})_{\max} = \tau_{xy} |_{y=0, z=-h/2} = Gah \left\{ 1 - \frac{1}{\text{ch}[\sqrt{10}a/(2h)]} \right\} \\ (\tau_{xz})_{\max} = \tau_{xz} |_{y=a/2, z=0} = \frac{\sqrt{10}}{4} Gah \cdot \text{th} \left( \frac{\sqrt{10}a}{2h} \right) \end{cases} \quad (5.70)$$

若采用 Kirchhoff 板理论, 则板中剪应力的结果为

$$\tau_{xy} = -2Gaz, \quad (\tau_{xy})_{\max} = Gah \quad (5.71)$$

$$\tau_{xz} = 0 \quad (5.72)$$

杆在两端的扭矩  $T$  与杆的扭转角  $\alpha$  的关系可以表示为

$$T = kGh^3 a \alpha \quad (5.73)$$

其中  $k$  是一个无量纲系数。采用 Reissner 理论, 求得此系数为

$$k^R = \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{2h}{\sqrt{10}a} \text{th} \frac{\sqrt{10}a}{2h} \right] \quad (5.74)$$

而按 Kirchhoff 板理论, 此系数为

$$k^K = 1/3 \quad (5.75)$$

由三维弹性力学分析, 可以求得受自由扭转的矩形截面杆的精确解。表 5.1 中列出了由 Kirchhoff 平板理论与 Reissner 平板理论的结果及其与精确解的比较。可以看出, 采用 Kirchhoff 平板理论计算, 误差很大。这应当在预料之中, 因为受扭矩形截面杆中,  $\tau_{xy}$  和  $\tau_{xz}$  都是主要应力分量, 从而  $\gamma_{xy}$  和  $\gamma_{xz}$  都是主要变形分量, 在 Kirchhoff 板理论中完全忽略  $\gamma_{xz}$ , 不可能得到满意的解答。不过并不能从这个例子得出 Kirchhoff 板理论无效的结论。绝大部分受横向载荷的薄板, 其弯曲变形是主要的, 横向剪切变形是次要的, 采用 Kirchhoff 板理论进行分析能够大大简化计算并得到满意的



结果。还没有其它平板理论能够取代 Kirchhoff 板理论在工程分析中的地位。

表5.1 Kirchhoff 板与 Reissner 板的结果比较

方法	$(\tau_{xy})_{\max}/(Gah/2)$			$(\tau_{xz})_{\max}/(Gah/2)$			$T/(Gah^3)$		
	$\beta=1$	$\beta=2$	$\beta=\infty$	$\beta=1$	$\beta=2$	$\beta=\infty$	$\beta=1$	$\beta=2$	$\beta=\infty$
K 理论	2	2	2	0	0	0	0.333	0.333	0.333
R 理论	1.21	1.83	2	1.45	1.575	1.58	0.139	0.228	0.333
精确解	1.35	1.86	2	1.35	1.48	1.49	0.1405	0.229	0.333

注：问题图见图5.4,  $\beta=a/h$ , R 理论指 Reissner 板理论, K 理论指 Kirchhoff 板理论。

这个例子表明, Reissner 板理论作为一种较精确的平板近似理论, 为解决中厚板问题提供了有力的工具。它具有足够的精度, 又不过于繁复。从表5.1可以看到, 即使对于  $\beta=a/h=1$  的厚板, Reissner 板理论的解答也有一定的精度。对于所计算的问题, 应力与精确解相比最大只有10%的误差, 刚度与精确解相比误差仅为1%左右。虽然从 Reissner 以来有许多学者继续研究厚板的问题, 提出了各种理论, 但目前被广泛承认和应用的解决厚板问题的理论仍是 Reissner 理论。

## 2. 自由边附近的应力分布

裂纹尖端是自由边界的特殊角点, 研究自由边界附近应力分布性态有重要意义。Reissner 型板理论能够满足自由边全部内力边界条件

$$M_n = 0, \quad M_{ns} = 0, \quad Q_n = 0 \quad (5.76)$$

Kirchhoff 板理论在自由边界则只能满足法向弯矩和等效剪力的条件

$$M_n = 0, \quad V_n = \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + Q_n = 0 \quad (5.77)$$

因此无论对于多薄的板, 两种理论所得到的自由边界附近应力分布性态总有显著区别。

Reissner<sup>[89]</sup>在提出他的平板弯曲理论时, 就指出过他的理论

有所谓边界效应现象。文献[29]对平板自由边界的边界效应作了更细致的研究。作者根据 Reissner 板理论,求得了均布载荷下各种边界条件的矩形板的级数解。对于图5.5所示作用均布载荷  $q$ , 三边简支、一边自由的矩形板, 扭矩  $M_{xy}$  和剪力  $Q_y$  的解答为

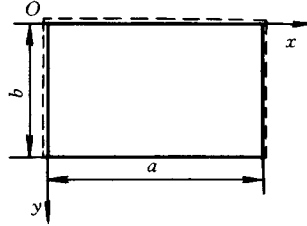


图5.5 三边简支、一边自由的矩形板

$$M_{xy} = -\frac{2qa^3}{\pi^3}(1-\nu) \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left[ 2(A_m + B_m) \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + 2B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \left( 1 + \frac{\eta_m^2}{m^2\pi^2} \right) \operatorname{ch} \frac{\eta_m y}{a} \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (5.78)$$

$$Q_y = -\frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left( 2B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{C_m}{m^2\pi^2\delta_a} \operatorname{ch} \frac{\eta_m y}{a} \right) \sin \frac{m\pi y}{a} \quad (5.79)$$

其中

$$\delta_a = \frac{D}{Ca^2} = \frac{1}{5(1-\nu)} \cdot \frac{h^2}{a^2} \quad (5.80)$$

$$A_m = \frac{1}{2} [(\operatorname{th}\beta_m - \beta_m) - 2B_m(1 + \beta_m \operatorname{th}\beta_m) -$$

$$C_m(1 + \frac{\eta_m^2}{m^2\pi^2}) \operatorname{ch} \frac{b\eta_m}{a} / \operatorname{ch}\beta_m$$

$$B_m = -\frac{1}{2} (\operatorname{th}\beta_m + C_m \operatorname{ch} \frac{b\eta_m}{a} / (m^2\pi^2\delta_a \operatorname{ch}\beta_m))$$

$$C_m = \left\{ 2m^2\pi^2\delta_a \left[ \frac{\nu}{1-\nu} (\text{cth}\beta_m - \text{th}\beta_m - 1/\text{sh}\beta_m) - \frac{\beta_m}{2} (1 - \text{th}^2\beta_m) \right] \right\} / \left\{ \frac{\text{ch} \frac{b\eta_m}{a} \left[ \frac{1+\nu}{\text{ch}\beta_m} + \beta_m (\text{cth}\beta_m - \text{th}\beta_m) \right] + m^2\pi^2\delta_a \left[ \left( 1 + \frac{\eta_m^2}{m^2\pi^2} \right) \frac{\text{ch} \frac{b\eta_m}{a}}{\text{ch}\beta_m} - \frac{2\eta_m}{m\pi} \frac{\text{sh} \frac{b\eta_m}{a}}{\text{sh}\beta_m} \right]} \right\}$$

$$\eta_m = \sqrt{m^2\pi^2 + \frac{2}{\delta_a(1-\nu)}}$$

$$\beta_m = \frac{m\pi b}{a}$$

图5.6以 $\delta_a$ 为参数画出了图5.5的板在直线 $x=a/2$ 上 $Q_y$ 的分布情况,其中 $\nu=0.3, b/a=0.5, \delta_a$ 已由式(5.80)给出。 $\delta_a=0$ 时的曲线相当于Kirchhoff板的结果。可以看到,当板较薄时,在离自由边较远的板的中间部分Reissner板理论与Kirchhoff板理论给出几乎相同的 $Q_y$ 。但是由Reissner板理论,在自由边附近, $Q_y$ 急剧

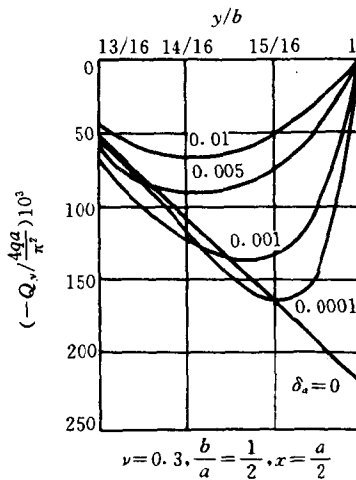


图5.6  $Q_y$ 的边界效应

减小,在边界上等于零,满足内力的实际边界条件,有明显的边界效应,而且板越薄,  $\delta_a$  愈小,这急剧变化的过渡区愈小。而由 Kirchhoff 板理论,  $Q_y$  在自由边附近没有边界效应,在自由边上为一较大的有限值,不满足内力的实际边界条件。对扭矩  $M_{xy}$  的计算能得出与  $Q_y$  类似的结论。

文献[29]的计算还表明,按 Reissner 板理论,等效剪力  $V_y = \partial M_{xy} / \partial x + Q_y$  在自由边界等于零,在自由边附近缓慢变化,并且几乎与参数  $\delta_a$  无关,这与 Kirchhoff 板理论的结果相同。

以上比较表明,① Kirchhoff 薄板理论在自由边上采用等效剪力为零的条件是合理的。除自由边邻近很小区域外,这个理论能给出合理的结果。② 对于涉及自由边邻近应力性态的平板断裂问题。无论是薄板还是中厚板, Kirchhoff 平板理论都带来较严重的理论缺陷,有必要采用 Reissner 型板理论进行较精确的分析。

### 3. 两种平板理论的典型结果比较

首先研究均布载荷  $q$  作用下,厚  $h$ ,半径为  $a$  的圆板。这是一个轴对称问题。取圆板中心为极坐标原点,下列三个函数为零

$$M_{r\theta} = 0, \quad Q_\theta = 0, \quad \psi_\theta = 0 \quad (5.81)$$

其它函数都与  $\theta$  无关。注意到式(5.61)和(5.63)中  $\Phi$  可以取为零,  $\psi_r$  和  $w$  可以用同一函数  $F(\theta)$  表示

$$\psi_r = \frac{dF}{dr}, \quad w = F - \frac{D}{D} \nabla^2 F \quad (5.82)$$

式(5.58)和(5.59)中不为零的内力可以表示为

$$\begin{cases} M_r = -D \left( \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dF}{dr} \right) \\ M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \nu \frac{d^2 F}{dr^2} \right) \\ Q_r = C \left[ \frac{dF}{dr} - \frac{D}{C} \frac{d}{dr} (\nabla^2 F) \right] \end{cases} \quad (5.83)$$

方程(5.64)成为常微分方程,通解为

$$F = C_1 \ln \frac{r}{a} + C_2 r^2 \ln \frac{r}{a} + C_3 r^2 + C_4 + \frac{qr^4}{64D} \quad (5.84)$$

将式(5.84)代入式(5.82)和(5.83),并由均布载荷下圆板中心挠度和内力为有限的条件,可以求得

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0 \quad (5.85)$$

对于简支板,可以由边界条件

$$w|_{r=a} = 0, \quad M_r|_{r=a} = 0 \quad (5.86)$$

确定式(5.84)中的常数  $C_3$  和  $C_4$ 。将式(5.84)代入式(5.82)第二式,得到板的挠度为

$$w = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2)\left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu}a^2 - r^2\right) + \frac{q}{4C}(a^2 - r^2) \quad (5.87)$$

最大挠度发生在板的中心  $r=0$  处

$$w_{\max} = \frac{5 + \nu}{64(1 + \nu)} \cdot \frac{qa^4}{D} \left[ 1 + \frac{16(1 + \nu)}{5(5 + \nu)(1 - \nu)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] \quad (5.88)$$

对于固支板,可以由边界条件

$$w|_{r=a} = 0, \quad \psi_r|_{r=a} = 0 \quad (5.89)$$

确定常数  $C_3$  和  $C_4$ ,求得

$$w = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2) + \frac{q}{4C}(a^2 - r^2) \quad (5.90)$$

$$w_{\max} = \frac{qa^4}{64D} \left[ 1 + \frac{16}{5(1 - \nu)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] \quad (5.91)$$

从式(5.87)和(5.90)可以看出,Reissner型简支和固支圆板在均布载荷下的挠度都可以分解为两部分,一部分与弯曲刚度  $D$  成反比,恰好是 Kirchhoff 板的结果,另一部分与板的横向剪切刚度  $C$  成反比,是 Reissner 型板理论对于 Kirchhoff 板理论的修正。剪切挠度在两种边界条件下相同,这是因为横向剪力是静定的,与边界条件无关。固支板的弯曲挠度比简支板的小,两种理论所得挠度的百分误差就大。表5.2列出了这种相对误差随无量纲厚度  $\beta = h/a$  的变化情况。可以作为确定 Kirchhoff 板适用范围的参考。这两种轴对称变形的圆板,由 Reissner 型板理论与由 Kirchhoff 板理论所求得的剪力与弯矩相同。

表5.2 圆板中心挠度的相对百分误差

支承条件	中心挠度的百分误差 <sup>①</sup> (%)								
	$\beta^2=0$	$\beta=0.1$	$\beta=0.2$	$\beta=0.3$	$\beta=0.4$	$\beta=0.5$	$\beta=0.6$	$\beta=0.8$	$\beta=1.0$
简支	0	-1.11	-4.29	-9.17	-15.2	-21.9	-28.8	-41.8	-52.9
固支	0	-4.37	-15.5	-29.1	-42.2	-53.3	-62.2	-74.5	-82.1

①圆板受均布载荷,材料的泊松比 $\nu=0.3$ ,百分误差的计算公式为 $(w_K-w_R)/w_R * 100\%$ ,其中 $w_K$ 为 Kirchhoff 板理论的中心挠度, $w_R$ 为 Reissner 型板理论的中心挠度。  
②无量纲厚度  $\beta=h/a$ 。

对于其它具有较为复杂的边界条件的板,一般不能得到简单的封闭形式解。文献[29]给出了各种支承条件下 Reissner 型矩形板的级数解,表5.3列出了均布载荷下对边简支、另对边固支方板的中心挠度与固支边中点弯矩的计算结果。可以看到,随着板的厚度的增加,Reissner 型板的挠度相对 Kirchhoff 板的挠度迅速地增加,弯矩的差别小一些,而且是 Reissner 型板的结果较小。

表5.3 对边简支、另对边固支方板的挠度与弯矩

$\delta_a$	$w/(qa^4/D)$	$M/(qa^2)$	$\delta_a$	$w/(qa^4/D)$	$M/(qa^2)$
0	0.00192	-0.0698	0.020	0.00379	-0.0585
0.005	0.00242	-0.0665	0.030	0.00464	-0.0548
0.010	0.00289	-0.0635	0.040	0.00547	-0.0518
0.015	0.00335	-0.0608	0.050	0.00628	-0.0494

注:板受均布载荷 $q$ 作用,泊松比 $\nu=0.3$ , $w$ 为板中心挠度, $M$ 为板的固支边中点挠度, $\delta_a=D/(Ca^2)=\frac{1}{5(1-\nu)}\left(\frac{h}{a}\right)^2$ , $\delta_a=0$ 时即为 Kirchhoff 板的解。

## § 5.7 两种平板理论用于含裂纹板时的比较

### 1. 弯曲裂纹尖端场及弯拉耦合问题

首先将板弯曲断裂问题与平面和反平面断裂问题作一比较。众所周知,平面问题包括平面应变与平面应力问题。对于平板

的平面应力问题,板内存在面内正应力  $\sigma_x, \sigma_y$  和面内剪应力  $\tau_{xy}$ 。还有一种所谓反平面问题,物体内仅有纵向剪应力  $\tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  不为零。

板弯曲问题的主要内力有弯矩  $M_x, M_y$  和扭矩  $M_{xy}$  它们分别由板的面内正应力  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  以及面内剪应力  $\tau_{xy}$  构成。它们与平面应力问题的不同点是:在平面应力情形,这三个应力分量沿板厚均匀分布;对于板弯曲问题,这三个应力分量沿板厚线性分布。板的弯曲内力还包括横向剪力  $Q_x$  和  $Q_y$ ,它们分别由板的横向剪应力  $\tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  构成。它们与反平面问题的不同点是,在反平面问题中,这两个非零剪应力沿纵向均匀分布;而对于板弯曲问题,这两个剪应力分量被认为沿板厚抛物线分布。

根据普通断裂力学书籍<sup>[82,83]</sup>,平面问题裂纹尖应力强度因子的定义为

(1)张开型(即面内拉伸型)

$$K_I = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sqrt{2\pi r} \sigma_y \quad (5.92)$$

其中裂纹尖端的极坐标参见图2.7。

(2)滑开型(即面内剪切型)

$$K_{II} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy} \quad (5.93)$$

利用  $K_I$  和  $K_{II}$ , 裂纹尖端附近的应力场能够表示为

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \\ & \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + O(r^0) \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \\ & \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + O(r^0) \end{aligned} \quad (5.95)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} +$$

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta\right) + O(r^0) \quad (5.96)$$

(3) 撕开型(纵向剪切型)

反平面问题的应力强度因子, 定义为

$$K_{II} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sqrt{2\pi r} \tau_{\theta z} \quad (5.97)$$

利用它, 裂纹尖端附近的纵向剪应力场能够表示为

$$\tau_{rz} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} + O(r^0) \quad (5.98)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + O(r^0) \quad (5.99)$$

类似地, 可以根据板的应力场在裂纹尖端沿厚度方向的最大值来定义板弯曲应力强度因子(注意, 不同的断裂力学文献和应力强度因子手册中, 应力强度因子的定义可能相差一个常数乘子  $\sqrt{\pi}$ )。

根据 § 2.6 推导的裂纹尖端场展开式, 可以利用 Kirchhoff 板弯曲应力强度因子  $K_1^{(K)}$  和  $K_2^{(K)}$  来表示 Kirchhoff 板的裂纹尖端场<sup>[8]</sup>, 其中加上标  $K$  是为了与 Reissner 型板理论的应力强度因子相区别

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{3+\nu}{2(1-\nu)} \cdot \frac{z}{h} \cdot \frac{K_1^{(K)}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-3\cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{5}{2}\theta\right) + \\ & \frac{3+\nu}{2(1-\nu)} \cdot \frac{z}{h} \cdot \frac{K_2^{(K)}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{9+7\nu}{1-\nu} \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{5}{2}\theta\right) + O(r^0) \end{aligned} \quad (5.100)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = & \frac{3+\nu}{2(1-\nu)} \cdot \frac{z}{h} \cdot \frac{K_1^{(K)}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{11+5\nu}{1-\nu} \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{5}{2}\theta\right) + \\ & \frac{3+\nu}{2(1-\nu)} \cdot \frac{z}{h} \cdot \frac{K_2^{(K)}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{5}{2}\theta\right) + O(r^0) \end{aligned} \quad (5.101)$$

$$\tau_{xy} = \frac{3+\nu}{2(1-\nu)} \cdot \frac{z}{h} \cdot \frac{K_1^{(K)}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{7+\nu}{1-\nu} \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{5}{2}\theta\right) +$$



$$\frac{3+\nu}{2(1-\nu)} \cdot \frac{z}{h} \cdot \frac{K_2^{(K)}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{5-3\nu}{1-\nu} \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{5}{2}\theta \right) + O(r^0) \quad (5.102)$$

Kirchhoff 板的横向剪应力不独立,它们可以利用 I 型和 II 型应力强度因子表示为

$$\tau_{xz} = \frac{f(z)}{\sqrt{2\pi r r}} \left( -K_1^{(K)} \cos \frac{3}{2}\theta + K_2^{(K)} \sin \frac{3}{2}\theta \right) \quad (5.103)$$

$$\tau_{yz} = \frac{f(z)}{\sqrt{2\pi r r}} \left( K_1^{(K)} \sin \frac{3}{2}\theta + K_2^{(K)} \cos \frac{3}{2}\theta \right) \quad (5.104)$$

其中

$$f(z) = \frac{h^2 - 4z^2}{4h(3+\nu)} \quad (5.105)$$

由比较可以看出, Kirchhoff 板裂纹尖端应力场的主要应力分量式(5.100)~(5.102)虽然与平面应力裂纹尖端场有同样的  $r^{-1/2}$  阶奇异性,但角分布函数不同,给拉伸与弯曲耦合问题的研究带来了困难。它的次要应力分量式(5.103)和(5.104)则为  $r^{-3/2}$  阶的奇异性,在裂纹尖端附近的应变能将为无限大,违背实际情况。因此 Kirchhoff 板的弯曲断裂理论有较严重的理论缺陷,有必要采用较精确的理论来评估这种理论缺陷带来的后果。

由下一章可以看到,根据 Reissner 型板理论,裂纹尖端应力应变场可以表示为

$$\sigma_x = \frac{K_1^{(R)}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \frac{2z}{h} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right) - \frac{K_2^{(R)}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \frac{2z}{h} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta \right) + O(r^0) \quad (5.106)$$

$$\sigma_y = \frac{K_1^{(R)}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{2z}{h} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right) + \frac{K_2^{(R)}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \frac{2z}{h} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta + O(r^0) \quad (5.107)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_1^{(R)}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \frac{2z}{h} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta + \frac{K_2^{(R)}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \frac{2z}{h} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta) + O(r^0) \quad (5.108)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{K_3^{(R)}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \frac{h^2 - 4z^2}{h^2} \sin \frac{\theta}{2} + O(r^0) \quad (5.109)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_3^{(R)}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \frac{h^2 - 4z^2}{h^2} \cos \frac{\theta}{2} + O(r^0) \quad (5.110)$$

由比较可以看到, Reissner 型板裂纹尖端附近的应力分布表达式(5.106)~(5.110)分别与平面应力问题与反平面问题裂纹尖端相应的应力表达式有相同的  $r^{-1/2}$  阶奇异性与相同的角分布函数, 能够较方便地研究它们的耦合问题。更精确的三维分析显示了采用 Reissner 型板理论进行断裂分析的科学性。

## 2. Kirchhoff 板与 Reissner 型板应力强度因子的比较

Knowles 和 Wang<sup>[23]</sup> 首先采用 Reissner 型板理论研究平板弯曲裂纹尖端场, 并获得了其展开式首项。他们发现, Reissner 型板裂纹尖端场与平面应力问题和反平面问题的裂纹尖端的相应表达式的奇异性与角分布函数相同, 当板厚趋于零时, Reissner 型板理论与 Kirchhoff 板理论求得的应力强度因子之比为  $(1+\nu)/(3+\nu)$ 。据此, 有人曾推荐采用  $(1+\nu)/(3+\nu)$  乘以 Kirchhoff 板弯曲的应力强度因子作为板弯曲问题的应力强度因子公式。以后的分析计算可以看到, 这样作是不合适的。

随后, Hartranft 和 Sih<sup>[24]</sup> 采用同样的方法研究了上述问题, 所不同的是考虑了板厚的影响。他们发现, 板厚对应力强度因子的影响很大。对于远处受均匀弯矩的无限大板, 由两种理论所得应力强度因子之关系为

$$K_1^{(R)} = \Phi(1)K_1^{(K)} \quad (5.111)$$

其中  $\Phi(1)$  是 Fredholm 方程之解, 它随板厚的变化情况如图 5.7 所示。可以看到, 虽然在板厚趋于零时,  $\Phi(1)$  趋于  $(1+\nu)/(3+\nu)$ , 但是在这一点曲线的斜率为无穷大, 它表明, 板厚从零增加到一个很

小的有限值时,  $\Phi(1)$  急剧增大, 因而采用  $(1+\nu)/(3+\nu)$  乘以 Kirchhoff 板的应力强度因子作为 Reissner 型板的应力强度因子, 是不可靠和不安全的。

另一方面, 尽管 Kirchhoff 板弯曲断裂理论有较严重的理论缺陷, 由它求得的断裂参数与由 Reissner 型板理论求得的断裂参数也有较大的偏差, 但是 Kirchhoff 板理论计算简单, 从图 5.7 看出, 所求得的主要应力的断裂参数是偏于保守或者说安全的。如果能借助于图 5.7 这样的一组典型对比曲线进行类比, 则采用 Kirchhoff 板理论进行断裂分析仍具有一定的意义。

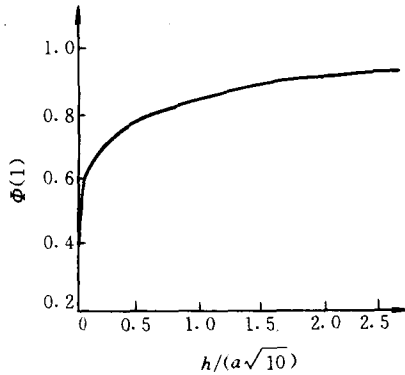


图 5.7 两种平板断裂理论求得的应力强度因子之比  $\Phi(1)$

## 第六章 由渐近展开法推导 Reissner 型 板裂纹尖端场

Reissner 型板裂纹尖端场一般展开式的获得是含裂纹板壳研究的重要进展。它更深入地揭示了平板弯曲裂纹尖端附近的力学性质。以它为基础所发展的局部-整体分析法,为复杂的有限尺寸含裂纹板的精确分析提供了有效实用的计算工具。

本章所介绍的 Reissner 型板裂纹尖端场一般展开式推导的渐近展开法是柳春图<sup>[26,27]</sup>提出的。

### § 6.1 基本方程和一般求解方法

研究含半无限直线裂纹的 Reissner 型板,如图 2.7 所示建立原点位于裂纹尖端的直角坐标系  $(x, y)$  和极坐标系  $(r, \theta)$ , 其中  $x$  轴指向裂纹延长线方向,极角  $\theta$  以  $x$  轴为始边,以  $x$  到  $y$  轴的转向为正向。

在极坐标下,Reissner 型板的平衡微分方程已由方程 (5.60) 给出,令横向载荷  $q=0$ ,就得到它的对应的齐次方程

$$\begin{aligned}
 & D \left[ \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial r} - \frac{\psi_r}{r^2} + \frac{1-\nu}{2r^2} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2r} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r \partial \theta} - \right. \\
 & \quad \left. \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right] + C \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \psi_r \right) = 0 \\
 & D \left[ \frac{1+\nu}{2r} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1-\nu}{2r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \right. \\
 & \quad \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1-\nu}{2r^2} \psi_\theta \right] + C \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi_\theta \right) = 0 \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

$$C \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \left( \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right) \right] = 0$$

裂纹面无外力作用时,边界条件为

$$M_\theta = M_{r\theta} = Q_\theta = 0 \quad \theta = \pm \pi \quad (6.2)$$

将式(5.58)后两式和式(5.59)第二式代入式(6.2),就得到以三个广义位移表示的裂纹面边界条件

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} + \nu \frac{\partial \psi_r}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi_\theta = 0 \end{cases} \quad \theta = \pm \pi \quad (6.3)$$

将三个广义位移作特征展开,写成推广的幂级数形式

$$\begin{cases} \psi_r^{(\lambda)} = r^\lambda [a_0(\theta, \lambda) + a_1(\theta, \lambda) \cdot r + a_2(\theta, \lambda) \cdot r^2 + \dots] \\ \psi_\theta^{(\lambda)} = r^\lambda [b_0(\theta, \lambda) + b_1(\theta, \lambda) \cdot r + b_2(\theta, \lambda) \cdot r^2 + \dots] \\ w^{(\lambda)} = r^\lambda [c_0(\theta, \lambda) + c_1(\theta, \lambda) \cdot r + c_2(\theta, \lambda) \cdot r^2 + \dots] \end{cases} \quad (6.4)$$

将展开式(6.4)代入基本方程(6.2)和裂纹面边界条件(6.3),逐阶处理求解,可以得到裂纹尖端位移场的各阶展开式,并由它进一步导出内力和应力的各阶展开式。

## § 6.2 裂纹尖端场的渐近展开

### 1. 特征值和 $a_0(\theta, \lambda)$ , $b_0(\theta, \lambda)$ , $C_0(\theta, \lambda)$ 的显式表达式

为了寻求一般展开式(6.4)中  $a_0(\theta, \lambda)$ ,  $b_0(\theta, \lambda)$  和  $c_0(\theta, \lambda)$  的显式形式,将式(6.4)代入基本方程(6.2)并按  $r^{\lambda-2}$  次的有关项整理,得到

$$\begin{cases} (\lambda^2 - 1)a_0 + \frac{1-\nu}{2}a_0' + \left(\frac{1+\nu}{2}\lambda - \frac{3-\nu}{2}\right)b_0'' = 0 \\ \left(\frac{1+\nu}{2}\lambda + \frac{3-\nu}{2}\right)a_0' + \frac{1-\nu}{2}(\lambda^2 - 1)b_0'' + b_0'' = 0 \\ c_0'' + \lambda^2 c_0 = 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

其中上标撇号表示对  $\theta$  求导。微分方程组(6.5)的通解可以写为

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = A_{01}\cos(\lambda + 1)\theta + A_{02}\sin(\lambda + 1)\theta + \\ \quad A_{03}\cos(\lambda - 1)\theta + A_{04}\sin(\lambda - 1)\theta \\ b_0 = B_{01}\sin(\lambda + 1)\theta + B_{02}\cos(\lambda + 1)\theta + \\ \quad B_{03}\sin(\lambda - 1)\theta + B_{04}\cos(\lambda - 1)\theta \\ c_0 = D_{01}\cos\lambda\theta + D_{02}\sin\lambda\theta \end{array} \right. \quad (6.6)$$

其中

$$B_{01} = A_{01}$$

$$B_{02} = A_{02}$$

$$B_{03} = -\frac{(1 + \nu)\lambda + 3 - \nu}{(1 + \nu)\lambda - (3 - \nu)}A_{03}$$

$$B_{04} = \frac{(1 + \nu)\lambda + 3 - \nu}{(1 + \nu)\lambda - (3 - \nu)}A_{04}$$

将式(6.4)代入裂纹面边界条件(6.3),按  $r^{\lambda-1}$  次的有关项、亦即按方程(6.5)的对应项整理,得到

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \nu\lambda)a_0 + b'_0 = 0 \\ a'_0 + (\lambda - 1)b_0 = 0 \\ c'_0 = 0 \end{array} \right. \quad \theta = \pm \pi \quad (6.7)$$

将通解(6.6)代入裂纹面边界条件(6.7),求非零解,可以确定  $\lambda$  的特征值为

$$\lambda = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots \quad (6.8)$$

根据在裂纹尖端应变能有限的原则,舍去式(6.8)中的零和负数项。最后可以得到  $a_0, b_0$  和  $c_0$  的显式表达式

(1) 当  $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$  时

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = A_{01} \left[ \cos(\lambda + 1)\theta - \frac{(1 + \nu)\lambda - (3 - \nu)}{(1 + \nu)(\lambda - 1)} \cos(\lambda - 1)\theta \right] + \\ \quad A_{02} \left[ \sin(\lambda + 1)\theta - \frac{(1 + \nu)\lambda - (3 - \nu)}{(1 + \nu)(\lambda + 1)} \sin(\lambda - 1)\theta \right] \\ b_0 = A_{01} \left[ -\sin(\lambda + 1)\theta + \frac{(1 + \nu)\lambda + 3 - \nu}{(1 + \nu)(\lambda - 1)} \sin(\lambda - 1)\theta \right] + \\ \quad A_{02} \left[ \cos(\lambda + 1)\theta - \frac{(1 + \nu) + 3 - \nu}{(1 + \nu)(\lambda + 1)} \cos(\lambda - 1)\theta \right] \\ c_0 = D_{02} \sin \lambda \theta \end{array} \right. \quad (6.9)$$

(2) 当  $\lambda = 1, 2, 3, \dots$  时

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = A_{01} \left[ \cos(\lambda + 1)\theta - \frac{(1 + \nu)\lambda - (3 - \nu)}{(1 + \nu)(\lambda + 1)} \cos(\lambda - 1)\theta + \right. \\ \quad \left. A_{02} \left[ \sin(\lambda + 1)\theta - \frac{(1 + \nu)\lambda - (3 - \nu)}{(1 + \nu)(\lambda - 1)} \sin(\lambda - 1)\theta \right] \right. \\ b_0 = A_{01} \left[ -\sin(\lambda + 1)\theta - \frac{(1 + \nu)\lambda + 3 - \nu}{(1 + \nu)(\lambda + 1)} \sin(\lambda - 1)\theta + \right. \\ \quad \left. A_{02} \left[ \cos(\lambda + 1)\theta - \frac{(1 + \nu)\lambda + (3 - \nu)}{(1 - \nu)(\lambda - 1)} \cos(\lambda - 1)\theta \right] \right. \\ c_0 = D_{01} \cos \lambda \theta \end{array} \right. \quad (6.10)$$

## 2. $a_1(\theta, \lambda)$ , $b_1(\theta, \lambda)$ 和 $c_1(\theta, \lambda)$ 的显式表达式

将式(6.4)代入基本方程(6.2)并按  $r^{\lambda-1}$  的有关项整理, 得到

$$\left\{ \begin{array}{l} D \left\{ a_1 \lambda(\lambda + 2) + \frac{1 - \nu}{2} a_1' + \left[ \frac{\lambda(1 + \nu)}{2} + \nu - 1 \right] + C c_0 \lambda = 0 \right. \\ D \left\{ \left[ \frac{\lambda(1 + \nu)}{2} + 2 \right] a_1' + b_1 \lambda(\lambda + 2) \frac{1 - \nu}{2} + b_1'' \right\} + C c_0' = 0 \\ c_1(\lambda + 1)^2 + c_1'' + (\lambda + 1)a_0 - b_0 = 0 \end{array} \right.$$

(6.11)

方程(6.11)较为复杂,它不仅包含 $\theta$ 和 $\lambda$ 的未知函数 $a_1(\theta, \lambda)$ ,  $b_1(\theta, \lambda)$ 和 $c_1(\theta, \lambda)$ ,还包含函数 $a_0, b_0$ 和 $c_0$ 。由于函数 $a_0, b_0$ 和 $c_0$ 的显式表达式已经给出,可以作为已知函数,方程(6.11)成为 $a_1, b_1$ 和 $c_1$ 的非齐次微分方程。它的全解由对应齐次方程的通解和一个特解构成。

方程(6.11)的一个特解可取为

$$\begin{cases} a_1^* = -\frac{2CD_{01}}{D[\lambda(1+\nu)+4]}\cos\lambda\theta - \frac{2CD_{02}}{D[\lambda(1+\nu)+4]}\sin\lambda\theta \\ b_1^* = 0 \\ c_1^* = \frac{\nu-1}{\lambda(1+\nu)-(3-\nu)}[A_{03}\cos(\lambda-1)\theta + A_{02}\sin(\lambda-1)\theta] \end{cases} \quad (6.12)$$

方程(6.11)对应齐次方程的通解为

$$\begin{cases} a_1 = A_{11}\cos(\lambda+2)\theta + A_{12}\sin(\lambda+2)\theta + A_{13}\cos\lambda\theta + A_{14}\sin\lambda\theta \\ b_1 = -A_{11}\sin(\lambda+2)\theta + A_{12}\cos(\lambda+2)\theta - \\ A_{13}\frac{\lambda(1+\nu)+4}{\lambda(1+\nu)+2(\nu-1)}\sin\lambda\theta + \\ A_{14}\frac{\lambda(1+\nu)+4}{\lambda(1+\nu)+2(\nu-1)}\cos\lambda\theta \\ c_1 = D_{11}\cos(\lambda+1)\theta + D_{12}\sin(\lambda+1)\theta \end{cases} \quad (6.13)$$

将式(6.4)代入边界条件(6.3),按方程(6.11)的对应项幂次整理,得到

$$\begin{cases} a_1[1+\nu(\lambda+1)] + b_1' = 0 \\ a_1' + \lambda b_1 = 0 & \theta = \pm \pi \\ c_1' - b_0 = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

将全解代入边界条件(6.14),再适当选取多余参数,可以求得



$a_1, b_1$  和  $c_1$  的表达式如下

$$(1) \lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \text{时}$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= D_{02} k^2 \frac{\lambda}{\lambda+1} [\sin(\lambda+2)\theta - \sin\lambda\theta] \\ b_1 &= -D_{02} k^2 \frac{\lambda+2}{\lambda+1} [\cos\lambda\theta - \frac{\lambda}{\lambda+2} \cos(\lambda+2)\theta] \\ c_1 &= \frac{A_{02}(1-\nu)}{(\lambda+1)(1+\nu)} [\sin(\lambda-1)\theta + \\ &\quad \frac{4 - (\lambda+1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} \sin(\lambda+1)\theta] + \frac{A_{01}(1-\nu)}{(\lambda-1)(1+\nu)} \cdot \\ &\quad [\cos(\lambda-1)\theta - \frac{4 + (\lambda-1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} \cos(\lambda+1)\theta] \end{aligned} \right. \quad (6.15)$$

(2) 当  $\lambda=1, 2, 3, \dots$  时

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= D_{01} k^2 \frac{\lambda}{\lambda+1} [\cos(\lambda+2)\theta - \cos\lambda\theta] \\ b_1 &= D_{01} k^2 \frac{\lambda+2}{\lambda+1} [\sin\lambda\theta - \frac{\lambda}{\lambda+2} \sin(\lambda+2)\theta] \\ c_1 &= \frac{A_{01}(1-\nu)}{(\lambda+1)(1+\nu)} [\cos(\lambda-1)\theta + \\ &\quad \frac{4 - (\lambda+1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} \cos(\lambda+1)\theta] + \frac{A_{02}(1-\nu)}{(\lambda-1)(1+\nu)} \cdot \\ &\quad [\sin(\lambda-1)\theta - \frac{4 + (\lambda-1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} \sin(\lambda+1)\theta] \end{aligned} \right. \quad (6.16)$$

$$\text{式中} \quad k^2 = \frac{C}{2D(1-\nu)} = \frac{5}{2h^2} \quad (6.17)$$

### 3. $a_i(\theta, \lambda)$ , $b_i(\theta, \lambda)$ 和 $c_i(\theta, \lambda)$ 的求法

按上述步骤,可以逐阶次求  $a_i(\theta, \lambda)$ ,  $b_i(\theta, \lambda)$  和  $c_i(\theta, \lambda)$  的显式表达式。在求解各阶次函数的微分方程组时,对应齐次方程的解有一定规律,可以求得通项公式如下

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i = A_{i1} \cos(\lambda + i + 1)\theta + A_{i2} \sin(\lambda + i + 1)\theta + \\ \quad A_{i3} \cos(\lambda + i - 1)\theta + A_{i4} \sin(\lambda + i - 1)\theta \\ b_i = B_{i1} \sin(\lambda + i + 1)\theta + B_{i2} \cos(\lambda + i + 1)\theta + \\ \quad B_{i3} \sin(\lambda + i - 1)\theta + B_{i4} \cos(\lambda + i - 1)\theta \\ c_i = D_{i1} \cos(\lambda + i)\theta + D_{i2} \sin(\lambda + i)\theta \end{array} \right. \quad (6.18)$$

其中

$$\begin{aligned} B_{i1} &= -A_{i1}, \quad B_{i2} = A_{i2} \\ B_{i3} &= -\frac{(\lambda + i)(\nu + 1) + 3 - \nu}{(\lambda + i)(\nu + 1) - (3 - \nu)} A_{i3} \\ B_{i4} &= \frac{(\lambda + i)(\nu + 1) + 3 - \nu}{(\lambda + i)(\nu + 1) - (3 - \nu)} A_{i4} \end{aligned}$$

### § 6.3 广义位移和广义内力展开式

上节已经对 Reissner 型板的三个广义位移在裂纹尖端作了渐近展开。将广义位移的渐近展开式代入式(5.58)和(5.59),就得到广义内力的渐近展开式。广义位移和广义内力直至  $r^3$  阶的展开式如下,其中待定系数的记号作了某些改变。

$$\begin{aligned} \psi_r &= r^{\frac{1}{2}} \left[ A_1^{(\frac{1}{2})} \left( \cos \frac{3}{2}\theta + \frac{3\nu - 5}{1 + \nu} \cos \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. A_2^{(\frac{1}{2})} \left( \sin \frac{3}{2}\theta + \frac{3\nu - 5}{3(1 + \nu)} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] + \\ &\quad r^{\frac{3}{2}} \frac{k^2}{3} D_2^{(\frac{1}{2})} \left( \sin \frac{5}{2}\theta - \sin \frac{\theta}{2} \right) + A_1^{(1)} r \left( \cos 2\theta + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_1^{(1)} r^2 \frac{k^2}{2} (\cos 3\theta - \cos \theta) + r^{\frac{3}{2}} \left[ A_1^{(\frac{3}{2})} \left( \cos \frac{5}{2} \theta - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{5\nu - 3}{1 + \nu} \cos \frac{\theta}{2} \right) + A_2^{(\frac{3}{2})} \left( \sin \frac{5}{2} \theta - \frac{5\nu - 3}{5(1 + \nu)} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] + \\
& D_2^{(\frac{3}{2})} r^{\frac{5}{2}} \frac{3k^2}{5} \left( \sin \frac{7}{2} \theta - \sin \frac{3}{2} \theta \right) + r^2 \left[ A_1^{(2)} (\cos 3\theta - \right. \\
& \left. \frac{3\nu - 1}{3(1 + \nu)} \cos \theta) + A_2^{(2)} (\sin 3\theta - \frac{3\nu - 1}{1 + \nu} \sin \theta) \right] + \\
& D_1^{(2)} r^3 \frac{2k^2}{3} (\cos 4\theta - \cos 2\theta) + O(r^{\frac{7}{2}}) \quad (6.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_\theta = & r^{\frac{1}{2}} \left[ A_1^{(\frac{1}{2})} \left( -\sin \frac{3}{2} \theta + \frac{7 - \nu}{1 + \nu} \sin \frac{\theta}{2} \right) + A_2^{(\frac{1}{2})} \left( \cos \frac{3}{2} \theta - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{7 - \nu}{3(1 + \nu)} \cos \frac{\theta}{2} \right) \right] - D_2^{(\frac{1}{2})} r^{\frac{3}{2}} \frac{5k^2}{3} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{5} \cos \frac{5}{2} \theta \right) - \\
& A_1^{(1)} r \sin 2\theta + A_2^{(1)} r + D_1^{(1)} r^2 \frac{3k^2}{2} (\sin \theta - \frac{1}{3} \sin 3\theta) + \\
& r^{\frac{3}{2}} \left[ A_1^{(\frac{3}{2})} \left( -\sin \frac{5}{2} \theta + \frac{9 + \nu}{1 + \nu} \sin \frac{\theta}{2} \right) + A_2^{(\frac{3}{2})} \left( \cos \frac{5}{2} \theta - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{9 + \nu}{5(1 + \nu)} \cos \frac{\theta}{2} \right) \right] - D_2^{(\frac{3}{2})} r^{\frac{5}{2}} \frac{7k^2}{5} \left( \cos \frac{3}{2} \theta - \frac{3}{7} \cos \frac{7}{2} \theta \right) + \\
& r^2 \left[ A_1^{(2)} \left( -\sin 3\theta + \frac{5 + \nu}{3(1 + \nu)} \sin \theta \right) + A_2^{(2)} \left( \cos 3\theta - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \cos \theta \right) \right] + D_1^{(2)} r^3 \frac{4k^2}{3} (\sin 2\theta - \frac{1}{2} \sin 4\theta) + O(r^{\frac{7}{2}}) \quad (6.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w = & r^{\frac{1}{2}} D_2^{(\frac{1}{2})} \sin \frac{\theta}{2} + r D_1^{(1)} \cos \theta + r^{\frac{3}{2}} D_2^{(\frac{3}{2})} \sin \frac{3}{2} \theta + \\
& r^{\frac{3}{2}} A_2^{(\frac{1}{2})} \cdot \frac{2(1 - \nu)}{3(1 + \nu)} \left[ -\sin \frac{\theta}{2} + \frac{5 + 3\nu}{3(1 - \nu)} \sin \frac{3}{2} \theta \right] - \\
& r^{\frac{3}{2}} A_1^{(\frac{1}{2})} \frac{2(1 - \nu)}{1 + \nu} \left[ \cos \frac{\theta}{2} - \frac{7 + \nu}{3(1 - \nu)} \cos \frac{3}{2} \theta \right] + r^2 D_1^{(2)} \cos 2\theta + \\
& r^2 A_1^{(1)} \frac{1 - \nu}{2(1 + \nu)} \left( 1 + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \cos 2\theta \right) + r^{\frac{5}{2}} D_2^{(\frac{5}{2})} \sin \frac{5}{2} \theta +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r^{\frac{5}{2}} A_2^{(\frac{3}{2})} \frac{2(1-\nu)}{5(1+\nu)} \left[ \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3+5\nu}{5(1-\nu)} \sin \frac{5}{2}\theta \right] + \\
& r^{\frac{5}{2}} A_1^{(\frac{3}{2})} \frac{2(1-\nu)}{1+\nu} \left[ \cos \frac{\theta}{2} - \frac{9-\nu}{5(1-\nu)} \cos \frac{5}{2}\theta \right] + \\
& r^3 D_1^{(3)} \cos 3\theta + r^3 A_1^{(2)} \frac{1-\nu}{3(1+\nu)} \left[ \cos \theta + \frac{1+3\nu}{3(1-\nu)} \cos 3\theta \right] + \\
& r^3 A_2^{(2)} \frac{1-\nu}{1+\nu} \left[ \sin \theta - \frac{5-\nu}{3(1-\nu)} \sin 3\theta \right] + O(r^{\frac{7}{2}}) \quad (6.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \frac{M_r}{D} = & r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (1-\nu) \left[ A_1^{(\frac{1}{2})} \left( \cos \frac{3}{2}\theta - 5 \cos \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\
& A_2^{(\frac{1}{2})} \left( \sin \frac{3}{2}\theta - \frac{5}{3} \sin \frac{\theta}{2} \right) \left. \right] + \frac{C}{4D} D_2^{(\frac{1}{2})} r^{\frac{1}{2}} \left( \sin \frac{5}{2}\theta - \right. \\
& \left. \sin \frac{\theta}{2} \right) + A_1^{(1)} (1-\nu) (\cos 2\theta + 1) + D_1^{(1)} \frac{C}{2D} r (\cos 3\theta - \\
& \cos \theta) + r^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} (1-\nu) \left[ A_1^{(\frac{3}{2})} \left( \cos \frac{5}{2}\theta + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\
& \left. A_2^{(\frac{3}{2})} \left( \sin \frac{5}{2}\theta + \frac{3}{5} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] + 2r(1-\nu) \cdot \\
& \left[ A_1^{(2)} (\cos 3\theta + \frac{1}{3} \cos \theta) + A_2^{(2)} (\sin 3\theta + \sin \theta) \right] + \\
& O(r^{\frac{3}{2}}) \quad (6.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \frac{M_\theta}{D} = & r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (\nu-1) \left[ A_1^{(\frac{1}{2})} \left( \cos \frac{3}{2}\theta + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\
& A_2^{(\frac{1}{2})} \left( \sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2} \right) \left. \right] - D_2^{(\frac{1}{2})} \frac{C}{4D} r^{\frac{1}{2}} \left( \sin \frac{5}{2}\theta - \right. \\
& \left. \sin \frac{\theta}{2} \right) + A_1^{(1)} (1-\nu) (1 - \cos 2\theta) - D_1^{(1)} \frac{C}{2D} r (\cos 3\theta - \\
& \cos \theta) + r^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} (\nu-1) \left[ A_1^{(\frac{3}{2})} \left( \cos \frac{5}{2}\theta - 5 \cos \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\
& \left. A_2^{(\frac{3}{2})} \left( \sin \frac{5}{2}\theta - \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] + 2r(\nu-1) \cdot
\end{aligned}$$

$$[A_1^{(2)}(\cos 3\theta - \cos \theta) + A_2^{(2)}(\sin 3\theta - 3\sin \theta)] + O(r^{\frac{3}{2}}) \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} -\frac{2M_{r\theta}}{D(1-\nu)} = & r^{-\frac{1}{2}} \left[ -A_1^{(\frac{1}{2})} \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3}{2}\theta \right) + A_2^{(\frac{1}{2})} \cdot \right. \\ & \left. \left( \cos \frac{3}{2}\theta + \frac{1}{3} \cos \frac{\theta}{2} \right) \right] + D_1^{(\frac{1}{2})} r^{\frac{1}{2}} k^2 \left( \cos \frac{5}{2}\theta - \right. \\ & \left. \cos \frac{\theta}{2} \right) - 2A_1^{(1)} \sin 2\theta + D_1^{(1)} r 2k^2 (\sin \theta - \sin 3\theta) + \\ & 3r^{\frac{1}{2}} \left[ A_1^{(\frac{3}{2})} \left( \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{5}{2}\theta \right) + A_2^{(\frac{3}{2})} \left( \cos \frac{5}{2}\theta - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{5} \cos \frac{\theta}{2} \right) \right] + 4r \left[ A_1^{(2)} (-\sin 3\theta + \frac{1}{3} \sin \theta) + \right. \\ & \left. A_1^{(2)} (\cos 3\theta - \cos \theta) \right] + O(r^{\frac{3}{2}}) \quad (6.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_r}{C} = & r^{\frac{1}{2}} \left[ A_1^{(\frac{1}{2})} \frac{2}{1+\nu} \left( \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3}{2}\theta \right) + \frac{2}{3(1+\nu)} \cdot \right. \\ & \left. A_2^{(\frac{1}{2})} \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3}{2}\theta \right) \right] + D_2^{(\frac{1}{2})} \left[ \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{k^2}{3} r^{\frac{3}{2}} \cdot \right. \\ & \left. \left( \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{5\theta}{2} \right) \right] + D_1^{(1)} \left[ \cos \theta + \frac{k^2}{2} r^2 (\cos \theta - \cos 3\theta) \right] + \\ & r^{\frac{3}{2}} \left[ A_1^{(\frac{3}{2})} \frac{2}{1+\nu} \left( \cos \frac{\theta}{2} - 5 \cos \frac{5}{2}\theta \right) + A_2^{(\frac{3}{2})} \frac{2}{5(1+\nu)} \cdot \right. \\ & \left. \left( \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{5\theta}{2} \right) \right] + D_2^{(\frac{3}{2})} \left[ r^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} \sin \frac{3}{2}\theta - r^{\frac{5}{2}} \frac{3k^2}{5} \left( \sin \frac{7}{2}\theta - \right. \right. \\ & \left. \left. \sin \frac{3}{2}\theta \right) \right] + r^2 \left[ A_1^{(2)} \frac{2}{3(1+\nu)} (\cos \theta - \cos 3\theta) + A_2^{(2)} \frac{2}{1+\nu} \cdot \right. \\ & \left. (\sin \theta - 3 \sin 3\theta) \right] + D_1^{(2)} \left[ 2r \cos 2\theta - r^3 \frac{2k^2}{3} \cdot \right. \\ & \left. (\cos 4\theta - \cos 2\theta) \right] + D_1^{(\frac{5}{2})} r^{\frac{3}{2}} \frac{5}{2} \sin \frac{5}{2}\theta + O(r^{\frac{7}{2}}) \quad (6.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{Q_\theta}{C} = & r^{\frac{1}{2}} \left[ -A_1^{(\frac{1}{2})} \frac{6}{1+\nu} (\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3}{2}\theta) + \right. \\
& A_2^{(\frac{1}{2})} \frac{2}{1+\nu} (\cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3}{2}\theta) \left. \right] + D_2^{(\frac{1}{2})} \left[ r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \right. \\
& r^{\frac{3}{2}} \frac{5k^2}{3} (\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{5} \cos \frac{5}{2}\theta) \left. \right] + D_1^{(1)} \left[ -\sin \theta - \frac{3}{2} k^2 r^2 (\sin \theta - \right. \\
& \left. \frac{1}{3} \sin 3\theta) \right] + r^{\frac{3}{2}} \left[ A_1^{(\frac{3}{2})} \frac{10}{1+\nu} (\sin \frac{5}{2}\theta - \sin \frac{\theta}{2}) + \right. \\
& A_2^{(\frac{3}{2})} \frac{2}{1+\nu} (\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{5} \cos \frac{5}{2}\theta) \left. \right] + D_2^{(\frac{3}{2})} \left[ r^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} \cos \frac{3}{2}\theta + \right. \\
& \left. r^{\frac{5}{2}} \frac{7k^2}{5} (\cos \frac{3}{2}\theta - \frac{3}{7} \cos \frac{7}{2}\theta) \right] + \\
& r^2 \left[ A_1^{(2)} \frac{2}{1+\nu} (-\sin \theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta) + A_2^{(2)} \frac{6}{1+\nu} (\cos \theta - \right. \\
& \left. \cos 3\theta) \right] - D_1^{(2)} \left[ 2r \sin 2\theta + r^3 \frac{4k^2}{3} (\sin 2\theta - \frac{1}{2} \sin 4\theta) \right] + \\
& D_2^{(\frac{5}{2})} r^{\frac{3}{2}} \frac{5}{2} \cos \frac{5}{2}\theta + O(r^{\frac{7}{2}}) \tag{6.26}
\end{aligned}$$

在上列各式中,系数的上标表示特征值数,由  $u_r = -z\psi_r$  和  $u_\theta = -z\psi_\theta$  可求得面内位移展开式。 $k^2$ 已由式(6.17)给出。

## § 6.4 几点讨论

①类似于平面问题和 Kirchhoff 板弯曲问题的 Williams 展开式,本章获得了 Reissner 型板弯曲裂纹尖端广义位移和广义内力的渐近展开式。利用上一章给出的应力与广义位移和广义内力之间的关系,也很容易得到各应力分量在裂纹尖端的渐近展开式。

②所得渐近展开式首项与文献[23,24]的结果一致。各应力分量在裂纹尖端的奇异性阶次与平面问题和反平面问题中的对应量一致,均为  $r^{-1/2}$  阶,并且对应幅角也相同,从而克服了 Kirchhoff

平板理论在断裂分析中的理论缺陷,能够在严格的理论基础上研究含裂纹板的弯拉组合问题。

③所得结果可以作为发展含裂纹平板数值分析方法的理论基础,原则上可以把平面断裂问题中应用 Willians 展开式的一套计算方法推广于分析 Reissner 型板的弯曲断裂问题,如边界配置法。奇异元分析、应用能量法计算等。本书后面将着重研究有普遍适用意义的奇异元与常规元相结合的局部-整体法。

### § 6.5 应力强度因子与展开式首项系数的关系

可以严格按照断裂力学中关于张开型、滑开型和撕开型三种类型的应力强度因子的定义去计算 Reissner 型板弯曲裂纹尖端的应力强度因子

$$\begin{cases} K_1(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_\theta(r, 0, z) \\ K_2(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{r\theta}(r, 0, z) \\ K_3(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{\theta z}(r, 0, z) \end{cases} \quad (6.27)$$

其中  $z$  是从板中面出发沿其法线方向的坐标。由上一章知道

$$\sigma_\theta = \frac{12M_\theta z}{h^3}, \tau_{r\theta} = \frac{12M_{r\theta} z}{h^3}, \tau_{\theta z} = \frac{3}{3h^3}(h^2 - 4z^2)Q_\theta \quad (6.28)$$

将式(6.23)、(6.24)和(6.26)代入式(6.28),然后代入式(6.27),可以求得 Reissner 型板弯曲裂纹尖端应力强度因子与其裂纹尖端场展开式首项的系数之间的关系

$$\begin{cases} K_1(z) = 4 \sqrt{2\pi} G z A_1^{(\frac{1}{2})} \\ K_2(z) = -\frac{4}{3} \sqrt{2\pi} G z A_2^{(\frac{1}{2})} \\ K_3(z) = \frac{5}{8} \sqrt{2\pi} G (1 - \frac{4z^2}{h^2}) D_2^{(\frac{1}{2})} \end{cases} \quad (6.29)$$

与平面问题和反平面问题裂纹尖端应力强度因子的不同点

是,Reissner 型板的应力强度因子沿板厚变化。I 型和 II 型应力强度因子的最大值  $K_1$  和  $K_2$  发生在板的表面,即  $z=h/2$  处,III 型应力强度因子的最大值  $K_3$  发生在板的中间,即  $z=0$  处。应用中通常关注的是这些应力强度因子的最大值,它们与相应展开式首项系数的关系为

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = 2 \sqrt{2\pi Gh A_1^{(\frac{1}{2})}} \\ K_2 = -\frac{2}{3} \sqrt{2\pi Gh A_2^{(\frac{1}{2})}} \\ K_3 = \frac{5}{8} \sqrt{2\pi GD_2^{(\frac{1}{2})}} \end{array} \right. \quad (6.30)$$



## 第七章 Reissner 型板裂纹尖端场 展开式的通项公式

上一章采用渐近展开法推导了 Reissner 型板弯曲裂纹尖端场。因为基本方程的较高阶渐近方程都是非齐次微分方程,故裂纹尖端展开式必须逐阶推求。第五章曾采用两个标量函数  $F$  和  $f$  简化了 Reissner 型板的基本公式和基本方程。本章利用它们进一步推导 Reissner 型板裂纹尖端场展开式的通项公式,使这项研究更为完整和深入。本章介绍的是柳春图和李英治的工作<sup>[42,43,51]</sup>。应当提及,互相独立地, Murthy 等<sup>[25]</sup>曾发表了其对称问题的结果。

### § 7.1 标量函数 $F$ 和 $f$ 表示的基本方程和公式

根据胡海昌<sup>[81]</sup>的研究,在 § 5.3 中已经利用两个标量函数  $F$  和  $f$  代替广义位移  $\psi_r$  和  $\psi_\theta$ ,对 Reissner 型板的基本方程与基本公式进行了简化,并在 § 5.5 中研究了它们的极坐标形式。这里总结如下。

广义位移  $\psi_r$  和  $\psi_\theta$  与标量函数  $F$  和  $f$  的变换关系为

$$\psi_r = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \psi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial r} \quad (7.1)$$

由  $F$  和  $f$  表示的 Reissner 型板的基本方程为

$$\nabla^2 \nabla^2 F = q \quad (7.2)$$

$$\nabla^2 f - 4k^2 f = 4k^2 \text{Re}\Phi \quad (7.3)$$

$$w = F - \frac{D}{C} \nabla^2 F + \text{Im}\Phi \quad (7.4)$$

其中  $\text{Re}$  和  $\text{Im}$  分别表示取函数的实部和虚部,  $\Phi(x+iy)$  是解析函数,且

$$k^2 = \frac{C}{2D(1-\nu)} = \frac{5}{2h^2} \quad (7.5)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (7.6)$$

由于基本方程已简化为两个不耦合的标量函数  $F$  和  $f$  的方程,用于研究裂纹尖端场的特征展开式特别方便。对于板的不包含奇点的区域,方程(7.3)和(7.4)中解析函数  $\Phi(x+iy)$  不影响位移和应力场,通常被略去。但是柳春图指出,对于包含裂纹尖端这样的奇点的区域,方程(7.3)和(7.4)中的  $\Phi(x+iy)$  必须保留,才能完全满足裂纹面的边界条件。这一发现解决了 Reissner 型板裂纹尖端场特征展开中的一个关键问题。

方程(7.3)是非齐次微分方程,它的解可以表达为一个特解与对应齐次方程的通解之和

$$f = f_0 + f_1 \quad (7.7)$$

其中特解  $f_1$  可以选择为

$$f_1 = -\operatorname{Re}\Phi \quad (7.8)$$

通解  $f_0$  满足相应的齐次方程

$$\nabla^2 f_0 - 4k^2 f_0 = 0 \quad (7.9)$$

将式(7.1)和(7.4)代入式(5.58)和(5.59),并注意到式(7.7)、(7.8)和(7.9),可以将极坐标下的内力由函数  $F$ 、 $f$  和  $f_0$  表示

$$\begin{cases} M_r = -D \left[ \nu \nabla^2 F + (1-\nu) \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right] \\ M_\theta = -D \left[ \nabla^2 F - (1-\nu) \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right] \\ M_{r\theta} = -D(1-\nu) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \left( 2k^2 f_0 - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) \right] \end{cases} \quad (7.10)$$

$$\begin{cases} Q_r = -C \left( \frac{D}{C} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 F + \frac{1}{r} \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right) \\ Q_\theta = C \left( \frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{D}{C} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 F \right) \end{cases} \quad (7.11)$$

在极坐标下,裂纹面的边界条件为

$$M_\theta = M_{,\theta} = Q_\theta = 0 \quad (7.12)$$

将式(7.10)和(7.11)中有关表达式代入边界条件(7.12),得到由函数  $F$ 、 $f$  和  $f_0$  表示的裂纹面的边界条件

$$\begin{cases} \nabla^2 F - (1-\nu) \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \left( 2k^2 f_0 - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{D}{C} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 F = 0 \end{cases} \quad (7.13)$$

## § 7.2 特征展开

### 1. 函数 $F$ 的特征展开

当外载  $q=0$  时,将函数  $F$  写成以下形式

$$F(r, \theta) = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \tilde{F}(\theta) \quad (7.14)$$

其中  $\lambda$  是函数的特征值。将式(7.14)代入方程(7.2)所对应的齐次方程,得到函数  $\tilde{F}(\theta)$  的常微分方程。在求得  $\tilde{F}(\theta)$  的通解后,函数  $F(r, \theta)$  能够进一步写为

$$\begin{aligned} F(r, \theta) = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} [ & A_1^{(\lambda)} \cos(\lambda-1)\theta + A_2^{(\lambda)} \sin(\lambda-1)\theta + \\ & A_3^{(\lambda)} \cos(\lambda+1)\theta + A_4^{(\lambda)} \sin(\lambda+1)\theta ] \end{aligned} \quad (7.15)$$

方程(7.4)中的函数  $\Phi(x+iy)$  是一个解析函数,在裂纹尖端邻域,它可展成为

$$\begin{aligned} \Phi(x+iy) = \sum_{\lambda} (\beta_{\lambda-1} + i\alpha_{\lambda-1}) r^{\lambda-1} [ & \cos(\lambda-1)\theta + \\ & i\sin(\lambda-1)\theta ] \end{aligned} \quad (7.16)$$

将展开式(7.15)和(7.16)代入式(7.4),得到

$$\begin{aligned} w = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} [ & A_1^{(\lambda)} \cos(\lambda-1)\theta + A_2^{(\lambda)} \sin(\lambda-1)\theta + \\ & A_3^{(\lambda)} \cos(\lambda+1)\theta + A_4^{(\lambda)} \sin(\lambda+1)\theta ] + \end{aligned}$$

$$\sum_{\lambda} r^{\lambda-1} \left[ (\alpha_{\lambda-1} - \frac{D}{C} 4\lambda A_1^{(\lambda)}) \cos(\lambda-1)\theta + (\beta_{\lambda-1} - \frac{D}{C} 4\lambda A_2^{(\lambda)}) \sin(\lambda-1)\theta \right] \quad (7.17)$$

根据对 Reissner 型板在裂纹尖端的奇异性分析<sup>[23,24]</sup>, 应力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  及内力  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$  在裂纹尖端应具有  $r^{-1/2}$  阶的奇异性, 这就要求广义位移  $\psi_x, \psi_y$  和  $w$  为  $r^{1/2}$  阶, 函数  $F$  和  $f$  为  $r^{3/2}$  阶

$$\psi_x, \psi_y, w = O(r^{1/2}) \quad (7.18)$$

$$F, f = O(r^{3/2}) \quad (7.19)$$

根据在裂纹尖端函数  $F$  和  $f$  的阶次条件(7.19), 当  $\lambda-1 < 1/2$  时, 应取

$$\alpha_{\lambda-1} = \frac{D}{C} 4\lambda A_1^{(\lambda)}, \quad \beta_{\lambda-1} = \frac{D}{C} 4\lambda A_2^{(\lambda)} \quad (7.20)$$

若引进两个新的待定常数符号

$$D_1^{\lambda-1} = \begin{cases} 0 & \text{当 } \lambda < \frac{3}{2} \\ \alpha_{\lambda-1} - \frac{D}{C} 4\lambda A_1^{(\lambda)} & \text{当 } \lambda \geq \frac{3}{2} \end{cases} \quad (7.21)$$

$$D_2^{(\lambda-1)} = \begin{cases} 0 & \text{当 } \lambda < \frac{3}{2} \\ \beta_{\lambda-1} - \frac{D}{C} 4\lambda A_2^{(\lambda)} & \text{当 } \lambda \geq \frac{3}{2} \end{cases} \quad (7.22)$$

则式(7.17)可以写为下列形式

$$\begin{aligned} w = & \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} [A_1^{(\lambda)} \cos(\lambda-1)\theta + A_2^{(\lambda)} \sin(\lambda-1)\theta + \\ & A_2^{(\lambda)} \cos(\lambda+1)\theta + A_4^{(\lambda)} \sin(\lambda+1)\theta] + \\ & \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} [D_1^{(\lambda-1)} \cos(\lambda-1)\theta + D_2^{(\lambda-1)} \sin(\lambda-1)\theta] \end{aligned} \quad (7.23)$$

## 2. 函数 $f$ 的特征展开

函数  $f_0$  是 Helmholtz 方程(7.9)的通解, 它可以用修正的

Bessel 函数表示

$$\begin{aligned}
 f_0 = & (B_1 + B_2\theta)I_0(2kr) + \\
 & \sum_{\lambda \text{ 为非整数}} \{ [B_1^{(\lambda)}I_\lambda(2kr) + B_1^{(-\lambda)}I_{-\lambda}(2kr)]\sin\lambda\theta + \\
 & [B_2^{(\lambda)}I_\lambda(2kr) + B_2^{(-\lambda)}I_{-\lambda}(2kr)]\cos\lambda\theta \} + \\
 & \sum_{\lambda \text{ 为整数}} \{ [B_3^{(\lambda)}I_\lambda(2kr) + B_3^{(-\lambda)}K_\lambda(2kr)]\sin\lambda\theta + \\
 & [B_4^{(\lambda)}I_\lambda(2kr) + B_4^{(-\lambda)}K_\lambda(2kr)]\cos\lambda\theta \} \quad (7.24)
 \end{aligned}$$

式中  $B_1, B_2, B_1^{(\lambda)}, B_1^{(-\lambda)}, B_2^{(\lambda)}, B_2^{(-\lambda)}, B_3^{(\lambda)}, B_3^{(-\lambda)}, B_4^{(\lambda)}$  和  $B_4^{(-\lambda)}$  都是独立未知常数;  $I_0(2kr)$  和  $I_\lambda(2kr)$  分别是零阶修正 Bessel 函数和第一类修正 Bessel 函数;  $I_{-\lambda}(2kr)$  和  $K_{-\lambda}(2kr)$  分别是  $\lambda$  为非整数和  $\lambda$  为整数时的第二类修正 Bessel 函数。

根据由式(7.19)表示的函数  $f$  的阶次分析,或根据裂纹尖端附近应变能为有限的条件,可以知道零阶修正 Bessel 函数和第二类修正 Bessel 函数的项都必须舍去,方程(7.9)的通解可以仅用第一类修正 Bessel 函数表示。为了确定系数的方便,采用下列形式的线性组合作为方程(7.9)的通解

$$f_0 = \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,2,\dots} (B_1^{(\lambda-1+2n)} f_{\lambda-1+2n} + B_2^{(\lambda-1+2n)} \tilde{f}_{\lambda-1+2n}) \quad (7.25)$$

其中  $f_{\lambda-1+2n}$  对应于对称问题

$$f_\lambda = \sin\lambda\theta I_\lambda(2kr) \quad (7.26)$$

$\tilde{f}_{\lambda-1+2n}$  对应于反对称问题

$$\tilde{f}_\lambda = \cos\lambda\theta I_\lambda(2kr) \quad (7.27)$$

从形式上看,式(7.25)比式(7.24)多引进了一重级数。实际上,对于某一确定的  $\lambda$  值,  $f_0$  只有两个独立未知数  $B_1^{(\lambda-1)}$  和  $B_2^{(\lambda-1)}$ , 其余系数  $B_1^{\lambda-1+2n}$  和  $B_2^{\lambda-1+2n}$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) 可以按某种递推关系求出。

下面将第一类修正 Bessel 函数  $I_\lambda(2kr)$  展开为级数

$$I_\lambda(2kr) = \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-2m}}{m! \varphi(\lambda, m)} \quad (7.28)$$

式中

$$\varphi(\lambda, m) = \frac{\Gamma(\lambda + m + 1)}{\Gamma(\lambda + 1)} \quad (7.29)$$

即

$$\varphi(\lambda, m) = \begin{cases} (\lambda + 1)(\lambda + 2)\cdots(\lambda + m) & \text{当 } m \geq 1 \\ 1 & \text{当 } m = 0 \end{cases} \quad (7.30)$$

将式(7.8)和(7.25)代入式(7.7), 函数  $f$  可以表示为

$$\begin{aligned} f = & \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} [B_1^{(\lambda-1+2n)} \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta \cdot \\ & \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} + \\ & B_2^{(\lambda-1+2n)} \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} + \\ & \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} [\alpha_{\lambda-1} \sin(\lambda - 1)\theta - \beta_{\lambda-1} \cos(\lambda - 1)\theta] \end{aligned} \quad (7.31)$$

### 3. 特征值, 特征展开式中各系数间的关系

将特征展开式(7.15)、(7.25)和(7.31)代入裂纹面边界条件(7.13), 便得到以特征展开式系数为未知数的线代数方程组。为了该方程组满足, 可取特征值  $\lambda$  为

$$\lambda = \pm \frac{n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.32)$$

根据式(7.19)给出的函数  $F$  和  $f$  的阶次分析,  $\lambda$  只能取正数

$$\lambda = \frac{n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.33)$$

根据边界条件(7.13), 还可以确定上述各特征展开式的系数之间所存在的关系, 得出实际应当保留的独立未知系数的个数。下面根据  $\lambda$  为半整数( $\lambda=1/2, 3/2, 5/2, \dots$ )和为整数( $\lambda=1, 2, 3, \dots$ )两种情况, 分别研究。

(1) 当  $\lambda$  为半整数, 即  $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

在裂纹面边界上,  $\theta = \pm\pi$ . 由于  $\lambda$  为半整数时,  $\cos\lambda\pi = 0$ , 欲使边界条件(7.13)得到满足, 只须令含  $\sin\lambda\pi$  的各项系数为零. 由此从边界条件(7.13)得到函数  $F$  和  $f$  展开式中未知系数的三个方程

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda} 4\lambda r^{\lambda-1} A_2^{(\lambda)} - (1-\nu) \sum_{\lambda} \lambda(\lambda+1) r^{\lambda-1} (A_2^{(\lambda)} + A_4^{(\lambda)}) - \\ & (1-\nu) \left\{ - \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} (\lambda-1+2n) B_2^{(\lambda-1+2n)} \cdot \right. \\ & \left. \sum_{m=0,1,\dots} \frac{(\lambda-2+2n+2m) k^{2m} r^{\lambda-3+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} + \right. \\ & \left. \sum_{\lambda} (\lambda-1)(\lambda-2) r^{\lambda-3} \beta_{\lambda-1} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{\lambda} \lambda r^{\lambda-1} [(\lambda-1) A_1^{(\lambda)} + (\lambda+1) A_3^{(\lambda)}] + 2k^2 \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} B_1^{(\lambda-1+2n)} \cdot \\ & \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} - \left\{ \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} B_1^{(\lambda-1+2n)} \cdot \right. \\ & \left. \sum_{m=0,1,\dots} \frac{(\lambda-1+2n+2m)(\lambda-2+2n+2m) k^{2m} r^{\lambda-3+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} + \right. \\ & \left. \sum_{\lambda} (\lambda-1)(\lambda-2) r^{\lambda-3} \alpha_{\lambda-1} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} B_1^{(\lambda-1+2n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{(\lambda-1+2n+2m) k^{2m} r^{\lambda-2+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} + \\ & \frac{D}{C} \sum_{\lambda} 4\lambda(\lambda-1) r^{\lambda-2} A_1^{(\lambda)} = 0 \end{aligned} \quad (7.36)$$

为了确定方程(7.34)~(7.36)中各系数之间的具体关系的方便, 再按对称与反对称情形分别进行研究.

#### a. 对称问题

在对称问题中, 展开式系数为  $A_1^{(\lambda)}$ 、 $A_3^{(\lambda)}$  和  $B_1^{(\lambda-1)}$ , 此时方程(7.34)不包含这三个未知系数, 因此这三个未知系数之间的关系由方程(7.35)和(7.36)确定, 最后只保留了一个独立未知系数.

考虑方程(7.36), 比较其  $r^{\lambda-2}$  阶系数可得

$$B_1^{(\lambda-1)} = -\frac{D}{C}4\lambda A_1^{(\lambda)} \quad (7.37)$$

令其余各阶系数为零,即令

$$\sum_{j=0,1,\dots}^m \frac{B_1^{(\lambda-1+2j)} k^{2(m-j)}}{(m-j)! \varphi(\lambda-1+2j, m-j)} = 0 \quad (7.38)$$

由此得到  $B_1^{(\lambda-1+2n)}$  的递推式

$$\begin{aligned} B_1^{(\lambda-1+2n)} &= \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} B_1^{(\lambda-1)} = \\ &= -\frac{4D\lambda}{C} \cdot \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} A_1^{(\lambda)} \end{aligned} \quad (7.39)$$

考虑方程(7.35),比较其  $r^{\lambda-3}$  阶系数可得

$$B_1^{(\lambda-1)} = -\alpha_{\lambda-1} \quad (7.40)$$

式中  $\alpha_{\lambda-1}$  是解析函数  $\Phi(x+iy)$  展开式中的系数。若取

$$\alpha_{\lambda-1} = \frac{D}{C}4\lambda A_1^{(\lambda)} \quad (7.41)$$

则当式(7.37)和(7.39)被满足时,方程(7.35)中除  $r^{\lambda-1}$  阶之外,其余各阶系数均为零。由  $r^{\lambda-1}$  阶系数比较给出以下关系

$$-\lambda[(\lambda-1)A_1^{(\lambda)} + (\lambda+1)A_3^{(\lambda)}] + 2k^2 B_1^{(\lambda-1)} = 0 \quad (7.42)$$

将式(7.5)和(7.37)代入上式,可以求得

$$A_3 = -\frac{4 + (\lambda-1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} A_1^{(\lambda)} \quad (7.43)$$

由上面的推导可见,对于对称问题,对应于每个特征值  $\lambda$ ,都只有一个独立的待定常数  $A_1^{(\lambda)}$ 。

#### b. 反对称问题

在反对称问题中,展开式系数为  $A_2^{(\lambda)}$ 、 $A_4^{(\lambda)}$  和  $B_2^{(\lambda-1)}$ 。此时方程(7.35)和(7.36)均不包含这三个未知系数,它们之间的关系由方程(7.34)确定,最后将保留两个独立未知系数。

比较方程(7.34)中  $r^{\lambda-3}$  阶的系数得到

$$B_2^{(\lambda-1)} = \beta_{\lambda-1} \quad (7.44)$$

由于没有类似式(7.37)的关系存在,解析函数  $\Phi(x+iy)$  中系数  $\beta_{\lambda-1}$  将是一个独立未知数。从式(7.22), $\beta_{\lambda-1}$  可以表示为



$$\beta_{\lambda-1} = D_2^{(\lambda-1)} + \frac{D}{C} 4\lambda A_2^{(\lambda)} \quad (7.45)$$

仅当  $\lambda > 3/2$  时,  $D_2^{(\lambda-1)} \neq 0$ 。

比较  $r^{\lambda-1}$  阶系数

$$4\lambda A_2^{(\lambda)} - (1-\nu)\lambda(\lambda+1)(A_2^{(\lambda)} + A_4^{(\lambda)}) = 0 \quad (7.46)$$

由此解得

$$A_4^{(\lambda)} = \frac{4 - (\lambda+1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} A_2^{(\lambda)} \quad (7.47)$$

令其余各阶系数为零, 得到

$$\sum_{j=0,1,\dots}^m (\lambda-1+2j) \frac{k^{2(m-j)} B_2^{(\lambda-1+2j)}}{(m-j)! \varphi(\lambda-1+2j, m-j)} = 0 \quad (7.48)$$

由此可得递推关系式

$$B_2^{(\lambda-1+2n)} = \frac{(\lambda-1)(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n+1)} B_2^{(\lambda-1)} = \frac{(\lambda-1)(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n+1)} \left( D_2^{(\lambda-1)} + \frac{D}{C} 4\lambda A_2^{(\lambda)} \right) \quad (7.49)$$

至此, 对应于每一个特征值  $\lambda$ , 已经只有两个独立待定系数  $A_2^{(\lambda)}$  和  $D_2^{(\lambda-1)}$ 。

(2) 当  $\lambda$  为整数, 即  $\lambda = 1, 2, 3, \dots$

用同样的方法, 可以确定  $\lambda$  为整数时各展开式系数之间的关系。以下仅给出结果, 过程从略。

a. 对称问题

$$B_1^{(\lambda-1)} = -\alpha_{\lambda-1} \quad (7.50)$$

$$\alpha_{\lambda-1} = D_1^{(\lambda-1)} + \frac{4D}{C} \lambda A_1^{(\lambda)} \quad \text{仅当 } \lambda \geq 3/2, D_2^{(\lambda-1)} \neq 0 \quad (7.51)$$

$$B_1^{(\lambda-1+2n)} = -\frac{(\lambda-1)(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n+1)} \left( D_1^{(\lambda-1)} + \frac{4D}{C} \lambda A_1^{(\lambda)} \right) \quad (7.52)$$

$$A_3^{(\lambda)} = \frac{4 - (\lambda + 1)(1 - \nu)}{(\lambda + 1)(1 - \nu)} A_1^{(\lambda)} \quad (7.53)$$

b. 反对称问题

$$B_2^{(\lambda-1)} = \frac{D}{C} 4\lambda A_2^{(\lambda)} \quad (7.54)$$

$$\beta_{\lambda-1} = \frac{D}{C} 4\lambda A_2^{(\lambda)} \quad (7.55)$$

$$B_2^{(\lambda-1+2n)} = \frac{4D\lambda}{C} \cdot \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi((\lambda + n - 2, n))} A_2^{(\lambda)} \quad (7.56)$$

$$A_4^{(\lambda)} = -\frac{4 + (\lambda - 1)(1 - \nu)}{(\lambda + 1)(1 - \nu)} A_2^{(\lambda)} \quad (7.57)$$

在确定了展开式系数之间的关系后,便求得了既满足基本方程又满足裂纹面边界条件的一类解答。解答中所保留的独立未知系数须由外边界条件确定。由弹性力学的唯一性定理,能够保证最终解答的唯一性。

### § 7.3 函数 $F$ 和 $f$ 的特征展开式

将上节式(7.37)~(7.57)所给出的各特征展开式系数关系式代入式(7.15)、(7.25)和(7.31),便得到函数  $F$  和  $f$  (包括  $f_0$ ) 在裂纹尖端特征展开式至任意阶的通项公式。

1. 当  $\lambda$  为半整数 ( $\lambda=1/2, 3/2, 5/2, \dots$ )

$$\begin{aligned} f_0 = & \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} \left[ -\frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} \sin(\lambda-1)\theta + \left( D_2^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} \right) \cdot \right. \\ & \left. \cos(\lambda-1)\theta \right] + \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \frac{k^2}{\lambda} \left\{ -\frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} [\sin(\lambda-1)\theta - \right. \\ & \left. \sin(\lambda+1)\theta] + \left( D_2^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} \right) [\cos(\lambda-1)\theta - \right. \\ & \left. \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \cos(\lambda+1)\theta] \right\} + \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ -\frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} \sin(\lambda-1+ \right. \\ & \left. 2n)\theta + \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} \left( D_2^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} \right) \cos(\lambda-1+2n)\theta \right]. \end{aligned}$$

$$\frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \quad (7.58)$$

$$\begin{aligned} f = & \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \frac{k^2}{\lambda} \left\{ -\frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} [\sin(\lambda - 1)\theta - \sin(\lambda + 1)\theta] + \right. \\ & \left( D_2^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} \right) \left[ \cos(\lambda - 1)\theta - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \cos(\lambda + 1)\theta \right] \Big\} + \\ & \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ -\frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta + \right. \\ & \left. \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} \left( D_2^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} \right) \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \cdot \\ & \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \quad (7.59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = & \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \left\{ A_1^{(\lambda)} \left[ \cos(\lambda - 1)\theta - \frac{4 + (\lambda - 1)(1 - \nu)}{(\lambda + 1)(1 - \nu)} \right. \right. \\ & \left. \left. \cos(\lambda + 1)\theta \right] + A_2^{(\lambda)} \left[ \sin(\lambda - 1)\theta + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{4 - (\lambda + 1)(1 - \nu)}{(\lambda + 1)(1 - \nu)} \sin(\lambda + 1)\theta \right] \right\} \quad (7.60) \end{aligned}$$

2. 当  $\lambda$  为整数 ( $\lambda=1, 2, 3, \dots$ )

$$\begin{aligned} f_0 = & \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} \left[ - \left( D_1^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} \right) \sin(\lambda - 1)\theta + \right. \\ & \left. \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} \cos(\lambda - 1)\theta \right] + \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \frac{k^2}{\lambda} \left\{ - \left( D_1^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} \right) \cdot \right. \\ & \left[ \sin(\lambda - 1)\theta - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \sin(\lambda + 1)\theta \right] + \\ & \left. \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} \left[ \cos(\lambda - 1)\theta - \cos(\lambda + 1)\theta \right] \right\} + \\ & \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ -\frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} \left( D_1^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} \right) \cdot \right. \\ & \left. \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \cdot \\ & \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \quad (7.61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f = & \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \frac{k^2}{\lambda} \left\{ - \left( D_1^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} \right) [\sin(\lambda-1)\theta - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \cdot \right. \\
 & \left. \sin(\lambda+1)\theta] + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} [\cos(\lambda-1)\theta - \cos(\lambda+1)\theta] \right\} + \\
 & \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ - \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} \left( D_1^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} \right) \cdot \right. \\
 & \left. \sin(\lambda-1+2n)\theta + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} \cos(\lambda-1+2n)\theta \right] \cdot \\
 & \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \quad (7.62)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F = & \sum_{\lambda} r^{(\lambda+1)} \left\{ A_1^{(\lambda)} \left[ \cos(\lambda-1)\theta + \frac{4-(\lambda+1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} \cdot \right. \right. \\
 & \left. \left. \cos(\lambda+1)\theta \right] + A_2^{(\lambda)} \left[ \sin(\lambda-1)\theta - \frac{4+(\lambda-1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} \cdot \right. \right. \\
 & \left. \left. \sin(\lambda+1)\theta \right] \right\} \quad (7.63)
 \end{aligned}$$

## § 7.4 广义位移和内力展开式

将位移函数展开式(7.58)~(7.63)代入式(7.1), (7.4), (7.10)和(7.11), 便得到广义位移  $\psi_r, \psi_\theta, w$  及板的内力  $M_r, M_\theta, M_\rho, Q_r$  和  $Q_\theta$  的级数表达式。

### 1. 广义位移 $\psi_r, \psi_\theta$ 和 $w$ 的展开式

(1) 当  $\lambda$  为半整数 ( $\lambda=1/2, 3/2, 5/2, \dots$ )

$$\begin{aligned}
 \psi_r = & \sum_{\lambda} r^{\lambda} \frac{3-\nu-\nu(\lambda+1)}{1-\nu} \cdot \\
 & \left\{ A_1^{(\lambda)} \left[ \cos(\lambda-1)\theta + \frac{(\lambda-1)(1+\nu)}{3-\lambda-\nu(\lambda+1)} \cos(\lambda+1)\theta \right] + \right. \\
 & \left. A_2^{(\lambda)} \left[ \sin(\lambda-1)\theta + \frac{(\lambda+1)(1-\nu)}{3-\lambda-\nu(\lambda+1)} \sin(\lambda+1)\theta \right] \right\} - \\
 & \sum_{\lambda} r^{\lambda} \frac{\lambda-1}{\lambda} k^2 D_2^{(\lambda-1)} [\sin(\lambda-1)\theta - \sin(\lambda+1)\theta] -
 \end{aligned}$$

$$\sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ (\lambda - 1 + 2n) \frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta + \right. \\ \left. (\lambda - 1)(D_2^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)}) \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \cdot \\ \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-2+2(m+n)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \quad (7.64)$$

$$\psi_{\theta} = \sum_{\lambda} r^{\lambda} \frac{3 + \lambda + \nu(\lambda - 1)}{1 - \nu} \left\{ A_1^{(\lambda)} [\sin(\lambda - 1)\theta - \right. \\ \left. \frac{(\lambda - 1)(1 + \nu)}{3 + \lambda + \nu(\lambda - 1)} \sin(\lambda + 1)\theta] - A_2^{(\lambda)} [\cos(\lambda - 1)\theta - \right. \\ \left. \frac{(\lambda + 1)(1 + \nu)}{3 + \lambda + \nu(\lambda - 1)} \cos(\lambda + 1)\theta] \right\} - \\ \sum_{\lambda} r^{\lambda} \frac{\lambda + 1}{\lambda} k^2 D_2^{(\lambda-1)} [\cos(\lambda - 1)\theta - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \cos(\lambda + 1)\theta] - \\ \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ -\frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta + \right. \\ \left. \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1 + 2n} \left( D_2^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} \right) \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \cdot \\ \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{(\lambda - 1 + 2n + 2m) k^{2m} r^{\lambda-2+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \quad (7.65)$$

$$w = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \left\{ A_1^{(\lambda)} \left[ \cos(\lambda - 1)\theta - \frac{4 + (\lambda - 1)(1 - \nu)}{(\lambda + 1)(1 - \nu)} \right. \right. \\ \left. \left. \cos(\lambda + 1)\theta \right] + A_2^{(\lambda)} \left[ \sin(\lambda - 1)\theta + \frac{4 - (\lambda + 1)(1 - \nu)}{(\lambda + 1)(1 - \nu)} \right. \right. \\ \left. \left. \sin(\lambda + 1)\theta \right] \right\} + \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} D_2^{(\lambda-1)} \sin(\lambda - 1)\theta \quad (7.66)$$

(2) 当  $\lambda$  为整数 ( $\lambda=1, 2, 3, \dots$ )

$$\phi_r = \sum_{\lambda} r^{\lambda} \frac{3 - \lambda - \nu(\lambda + 1)}{1 - \nu} \cdot \\ \left\{ A_1^{(\lambda)} \left[ \cos(\lambda - 1)\theta + \frac{(\lambda + 1)(1 + \nu)}{3 - \lambda - \nu(\lambda + 1)} \cos(\lambda + 1)\theta \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& A_2^{(\lambda)} \left[ \sin(\lambda - 1)\theta + \frac{(\lambda - 1)(1 + \nu)}{3 - \lambda - \nu(\lambda + 1)} \sin(\lambda + 1)\theta \right] - \\
& \sum_{\lambda} r^{\lambda} D_1^{(\lambda-1)} \frac{\lambda - 1}{\lambda} k^2 [\cos(\lambda - 1)\theta - \cos(\lambda + 1)\theta] - \\
& \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ (\lambda - 1) \left( D_1^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} \right) \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta + \right. \\
& \left. \left[ \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} (\lambda - 1 + 2n) \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \cdot \right. \\
& \left. \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda - 2 + 2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \right] \quad (7.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{\theta} &= \sum_{\lambda} r^{\lambda} \frac{3 + \lambda + \nu(\lambda - 1)}{1 - \nu} \cdot \\
& \left\{ A_1^{(\lambda)} \left[ \sin(\lambda - 1)\theta - \frac{(\lambda + 1)(1 + \nu)}{3 + \lambda + \nu(\lambda - 1)} \sin(\lambda + 1)\theta \right] - \right. \\
& A_2^{(\lambda)} \left[ \cos(\lambda - 1)\theta - \frac{(\lambda - 1)(1 + \nu)}{3 + \lambda + \nu(\lambda - 1)} \cos(\lambda + 1)\theta \right] \left. \right\} + \\
& \sum_{\lambda} (\lambda + 1) r^{\lambda} D_1^{(\lambda-1)} \frac{k^2}{\lambda} \sin(\lambda - 1)\theta - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \sin(\lambda + 1)\theta \left. \right] - \\
& \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ -\frac{\lambda - 1}{\lambda - 1 + 2n} (D_1^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)}) \sin(\lambda - \right. \\
& \left. 1 + 2n)\theta + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \cdot \\
& \sum_{m=0,1,\dots} \frac{(\lambda - 1 + 2n + 2m) k^{2m} r^{\lambda - 2 + 2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \quad (7.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w &= \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \cdot \\
& \left\{ A_1^{(\lambda)} \left[ \cos(\lambda - 1)\theta + \frac{4 - (\lambda + 1)(1 - \nu)}{(\lambda + 1)(1 - \nu)} \cos(\lambda + 1)\theta \right] + \right. \\
& A_2^{(\lambda)} \left[ \sin(\lambda - 1)\theta - \frac{4 + (\lambda - 1)(1 - \nu)}{(\lambda + 1)(1 - \nu)} \sin(\lambda + 1)\theta \right] \left. \right\} + \\
& \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} D_1^{(\lambda-1)} \cos(\lambda - 1)\theta \quad (7.69)
\end{aligned}$$

## 2. 内力 $M_r, M_\theta, M_{r\theta}, Q_r$ 和 $Q_\theta$ 的展开式

(1) 当  $\lambda$  为半整数 ( $\lambda=1/2, 3/2, 5/2, \dots$ )

$$\begin{aligned}
 -\frac{M_r}{D} = & - \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} \lambda (1 + \nu) \cdot \\
 & \left\{ A_1^{(\lambda)} [(\lambda - 3) \cos(\lambda - 1)\theta - (\lambda - 1) \cos(\lambda + 1)\theta] + \right. \\
 & \left. A_2^{(\lambda)} [(\lambda - 3) \sin(\lambda - 1)\theta - (\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)\theta] \right\} - \\
 & \frac{C}{2D} \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} D_2^{(\lambda-1)} (\lambda - 1) [\sin(\lambda - 1)\theta - \sin(\lambda + 1)\theta] - \\
 & (1 - \nu) \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ (\lambda - 1 + 2n) \frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta + \right. \\
 & \left. (\lambda - 1) \left( D_2^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} \right) \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \cdot \\
 & \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{(\lambda - 2 + 2n + 2m) k^{2m} r^{\lambda-3+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)}
 \end{aligned} \tag{7.70}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{M_\theta}{D} = & \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} \lambda (\lambda + 1) (1 + \nu) \cdot \\
 & \left\{ A_1^{(\lambda)} \left[ \cos(\lambda - 1)\theta - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \cos(\lambda + 1)\theta \right] + \right. \\
 & \left. A_2^{(\lambda)} [\sin(\lambda - 1)\theta - \sin(\lambda + 1)\theta] \right\} + \\
 & \frac{C}{2D} \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} D_2^{(\lambda-1)} (\lambda - 1) [\sin(\lambda - 1)\theta - \sin(\lambda + 1)\theta] + \\
 & (1 - \nu) \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ (\lambda - 1 + 2n) \frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} \cos(\lambda - 1 + \right. \\
 & \left. 2n)\theta + (\lambda - 1) \left( D_2^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} \right) \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \cdot \\
 & \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \cdot
 \end{aligned}$$

$$\sum_{m=0,1,\dots} \frac{(\lambda - 2 + 2n + 2m)k^{2m}r^{\lambda-3+2(n+m)}}{m!\varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \quad (7.71)$$

$$-\frac{2M_{r\theta}}{D(1-\nu)} = \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} \frac{2\lambda(1+\nu)}{1-\nu}.$$

$$\{A_1^{(\lambda)}(\lambda - 1)[\sin(\lambda - 1)\theta - \sin(\lambda + 1)\theta] -$$

$$A_2^{(\lambda)}[(\lambda - 1)\cos(\lambda - 1)\theta - (\lambda + 1)\cos(\lambda + 1)\theta]\} -$$

$$\sum_{\lambda} r^{\lambda-1} 2(\lambda - 1)D_2^{(\lambda-1)}k^2[\cos(\lambda - 1)\theta - \cos(\lambda + 1)\theta] -$$

$$\sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ -\frac{4D\lambda}{C}A_1^{(\lambda)}\sin(\lambda - 1 + 2n)\theta + \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1 + 2n} \cdot \right.$$

$$\left. \left( D_2^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C}A_2^{(\lambda)} \right) \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \frac{(-k^2)^n}{n!\varphi(\lambda + n - 2, n)} \cdot$$

$$\sum_{m=0,1,\dots} \frac{[(\lambda - 1 + 2n)^2 + (\lambda - 1 + 2n + 2m)(\lambda - 3 + 2n + 2m)]}{m!\varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \cdot$$

$$\frac{k^{2m}r^{\lambda-3+2(n+m)}}{m!\varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \quad (7.72)$$

$$\frac{Q_r}{C} = \sum_{\lambda} r^{\lambda-2} D_2^{(\lambda-1)}(\lambda - 1)\sin(\lambda - 1)\theta + \sum_{\lambda} r^{\lambda} \frac{k^2}{\lambda} \cdot$$

$$\left\{ \frac{4D\lambda}{C}A_1^{(\lambda)}[(\lambda - 1)\cos(\lambda - 1)\theta - (\lambda + 1)\cos(\lambda + 1)\theta] + \right.$$

$$\left. (\lambda - 1) \left( D_2^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C}A_2^{(\lambda)} \right) [\sin(\lambda - 1)\theta - \sin(\lambda + 1)\theta] \right\} +$$

$$\sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ (\lambda - 1 + 2n) \frac{4D\lambda}{C}A_1^{(\lambda)}\cos(\lambda - 1 + 2n)\theta + \right.$$

$$\left. (\lambda - 1) \left( D_2^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C}A_2^{(\lambda)} \right) \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \cdot$$

$$\frac{(-k^2)^n}{n!\varphi(\lambda + n - 2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m}r^{\lambda-2+2(n+m)}}{m!\varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \quad (7.73)$$

$$\frac{Q_{\theta}}{C} = \sum_{\lambda} r^{\lambda-2}(\lambda - 1)D_2^{(\lambda-1)}\cos(\lambda - 1)\theta +$$



$$\begin{aligned}
& \sum_{\lambda} r^{\lambda} \frac{\lambda+1}{\lambda} k^2 \left\{ -\frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} [\sin(\lambda-1)\theta - \sin(\lambda+1)\theta] + \right. \\
& \left. \left( D_2^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} \right) \left[ \cos(\lambda-1)\theta - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \cos(\lambda+1)\theta \right] \right\} + \\
& \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ -\frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)} \sin(\lambda-1+2n)\theta + \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} \cdot \right. \\
& \left. \left( D_2^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} \right) \cos(\lambda-1+2n)\theta \right] \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \cdot \\
& \sum_{m=0,1,\dots} \frac{(\lambda-1+2n+2m) k^{2m} r^{\lambda-2+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \quad (7.74)
\end{aligned}$$

(2) 当  $\lambda$  为整数 ( $\lambda=1, 2, 3, \dots$ )

$$\begin{aligned}
-\frac{M_r}{D} &= \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} \lambda (1+\nu) \cdot \\
& \{ A_1^{(\lambda)} [(\lambda-3)\cos(\lambda-1)\theta - (\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta] + \\
& A_2^{(\lambda)} [(\lambda-3)\sin(\lambda-1)\theta - (\lambda-1)\sin(\lambda+1)\theta] \} - \\
& \frac{C}{2D} \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} D^{(\lambda-1)} (\lambda-1) [\cos(\lambda-1)\theta - \cos(\lambda+1)\theta] - \\
& (1-\nu) \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ (\lambda-1) (D_1^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C} A_1^{(\lambda)}) \cos(\lambda- \right. \\
& \left. 1+2n)\theta + \frac{4D\lambda}{C} A_2^{(\lambda)} (\lambda-1+2n) \sin(\lambda-1+2n)\theta \right] \cdot \\
& \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \cdot \\
& \sum_{m=0,1,\dots} \frac{(\lambda-2+2n+2m) k^{2m} r^{\lambda-3+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \quad (7.75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{M_{\theta}}{D} &= \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} \lambda (\lambda+1) (1+\nu) \{ A_1^{(\lambda)} [\cos(\lambda-1)\theta - \cos \cdot \\
& (\lambda+1)\theta] + A_2^{(\lambda)} [\sin(\lambda-1)\theta - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \sin(\lambda+1)\theta] + \\
& \frac{C}{2D} \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} D_1^{(\lambda-1)} (\lambda-1) [\cos(\lambda-1)\theta - \cos(\lambda+1)\theta]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \nu) \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} [(\lambda - 1)(D_1^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C}A_1^{(\lambda)})\cos(\lambda - \\
& 1 + 2n)\theta + \frac{4D\lambda}{C}A_2^{(\lambda)}(\lambda - 1 + 2n)\sin(\lambda - 1 + 2n)\theta] \cdot \\
& \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \cdot \\
& \sum_{m=0,1,\dots} \frac{(\lambda - 2 + 2n + 2m)k^{2m}r^{\lambda-3+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \quad (7.76) \\
& - \frac{2M_{\theta}}{D(1 - \nu)} = \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} \frac{2\lambda(1 + \nu)}{1 - \nu} \{A_1^{(\lambda)} \cdot \\
& [(\lambda - 1)\sin(\lambda - 1)\theta - (\lambda + 1)\sin(\lambda + 1)\theta] - \\
& A_2^{(\lambda)}(\lambda - 1)[\cos(\lambda - 1)\theta - \cos(\lambda + 1)\theta]\} + \\
& \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} D_1^{(\lambda-1)} 2(\lambda - 1)k^2 [\sin(\lambda - 1)\theta - \\
& \sin(\lambda + 1)\theta] - \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ -\frac{\lambda - 1}{\lambda - 1 + 2n} \right. \\
& \left. (D_1^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C}A_1^{(\lambda)})\sin(\lambda - 1 + 2n)\theta + \right. \\
& \left. \frac{4D\lambda}{C}A_2^{(\lambda)}\cos(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \cdot \\
& \sum_{m=0,1,\dots} \frac{[(\lambda - 1 + 2n)^2 + (\lambda - 1 + 2n + 2m)(\lambda - 3 + 2n + 2m)]}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \cdot \\
& k^{2m} r^{\lambda-3+2(n+m)} \quad (7.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{Q_r}{C} & = \sum_{\lambda} r^{\lambda-2} D_1^{(\lambda-1)} (\lambda - 1) \cos(\lambda - 1)\theta + \sum_{\lambda} r^{\lambda} \frac{k^2}{\lambda} \{ (D_1^{(\lambda-1)} + \\
& \frac{4D\lambda}{C}A_1^{(\lambda)}) (\lambda - 1) [\cos(\lambda - 1)\theta - \cos(\lambda + 1)\theta] + \\
& \frac{4D\lambda}{C}A_2^{(\lambda)} [(\lambda - 1)\sin(\lambda - 1)\theta - (\lambda + 1)\sin(\lambda + 1)\theta] \} + \\
& \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} [(\lambda - 1)(D_1^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C}A_1^{(\lambda)})\cos(\lambda - 1 + 2n)\theta +
\end{aligned}$$

$$\frac{4D\lambda}{C}A_2^{(\lambda)}(\lambda-1+2n)\sin(\lambda-1+2n)\theta] \frac{(-k^2)^n}{n!\varphi(\lambda+n-2,n)} \cdot$$

$$\sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m}r^{\lambda-2+2(n+m)}}{m!\varphi(\lambda-1+2n,m)} \quad (7.78)$$

$$\frac{Q_\theta}{C} = - \sum_{\lambda} r^{(\lambda-2)}(\lambda-1)D_1^{(\lambda-1)}\sin(\lambda-1)\theta + \sum_{\lambda} r^{\lambda} \frac{\lambda+1}{\lambda} k^2 \cdot$$

$$\left\{ - (D_1^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C}A_1^{(\lambda)})[\sin(\lambda-1)\theta - \frac{\lambda-1}{\lambda+1}\sin(\lambda+1)\theta] + \right.$$

$$\left. \frac{4D\lambda}{C}A_2^{(\lambda)}[\cos(\lambda-1)\theta - \cos(\lambda+1)\theta] \right\} +$$

$$\sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ - \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} (D_1^{(\lambda-1)} + \frac{4D\lambda}{C}A_1^{(\lambda)})\sin(\lambda-1+2n)\theta + \right.$$

$$\left. \frac{4D\lambda}{C}A_2^{(\lambda)}\cos(\lambda-1+2n)\theta \right] \frac{(-k^2)^n}{n!\varphi(\lambda+n-2,n)} \cdot$$

$$\sum_{m=0,1,\dots} \frac{(\lambda-1+2n+2m)k^{2m}r^{\lambda-2+2(n+m)}}{m!\varphi(\lambda-1+2n,m)} \quad (7.79)$$

注意,以上式中的双重级数均有

$$m+n > 1 \quad (7.80)$$

且仅当  $\lambda \geq 3/2$  时,

$$D_1^{(\lambda-1)} \neq 0, D_2^{(\lambda-1)} \neq 0 \quad (7.81)$$

## 第八章 含裂纹 Reissner 型板断裂分析的 局部-整体法

在绪论和第五章已经指出,Reissner 型板理论作为一种较精确的平板近似理论,为平板的断裂分析提供了有力的工具。它克服了 Kirchhoff 经典板理论在断裂分析中的理论缺陷,又比完全的三维分析要简化得多。然而相对于平面断裂问题和 Kirchhoff 板的弯曲断裂问题,Reissner 型板断裂问题的分析仍然较为复杂,只在少数几种理想的情况下获得了解析解<sup>[23,24,84]</sup>。采用常规有限元法分析含裂纹有限尺寸 Reissner 型板,结果不甚理想。少数几篇文章,对于裂纹尖端单元采用了一些特殊技巧来模拟应力奇异性,取得一些效果,不过误差仍然偏大。

上两章所推导的 Reissner 型板裂纹尖端场的一般展开式为发展 Reissner 型板的精度高又实用的所谓局部-整体分析法提供了理论基础。其中以 Reissner 型板裂纹尖端位移场展开式为位移模式所构造的裂纹尖端高阶奇异元与常规元相结合的方法,是一种精确有效,并且具有普通适用意义的方法。在数值算例中,无论是由位移法构造的奇异元,还是应力杂交法构造的奇异元;无论奇异元形状是圆形还是矩形,都得到了令人满意的结果。

### § 8.1 裂纹尖端奇异元的位移模式

Reissner 型板裂纹尖端奇异元的位移模式可以由 Reissner 型板裂纹尖端位移场展开式截取前若干项加上三个板的刚体位移构成

$$w = \sum_{i=1}^N [a_i F_{w_i}(r, \theta) + b_i G_{w_i}(r, \theta)] + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} [\tilde{a}_i \tilde{F}_{w_i}(r, \theta) + \tilde{b}_i \tilde{G}_{w_i}(r, \theta)] + w_0 + a_0 \frac{r}{R} \cos \theta + b_0 \frac{r}{R} \sin \theta \quad (8.1)$$

$$\psi_r = \sum_{i=1}^N [a_i F_{r_i}(r, \theta) + b_i G_{r_i}(r, \theta)] + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} [\tilde{a}_i \tilde{F}_{r_i}(r, \theta) + \tilde{b}_i \tilde{G}_{r_i}(r, \theta)] + \frac{a_0}{R} \cos \theta + \frac{b_0}{R} \sin \theta \quad (8.2)$$

$$\psi_\theta = \sum_{i=1}^N [a_i F_{\theta_i}(r, \theta) + b_i G_{\theta_i}(r, \theta)] + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} [\tilde{a}_i \tilde{F}_{\theta_i}(r, \theta) + \tilde{b}_i \tilde{G}_{\theta_i}(r, \theta)] - \frac{a_0}{R} \sin \theta + \frac{b_0}{R} \cos \theta \quad (8.3)$$

其中  $r, \theta$  是以裂纹尖端为中心的极坐标 (仍参见图 4.1); 待定系数  $a_i$  和  $\tilde{a}_i$  所在的项相应于关于  $x$  轴的对称模式,  $b_i$  和  $\tilde{b}_i$  所在的项相应于反对称模式;  $R$  是某一特征长度, 例如对于圆形奇异元, 取其半径, 对于矩形奇异元, 取作对角线半长;  $a_0, b_0$  和  $w_0$  是三个表示板的刚体位移 (分别绕  $x$  轴和  $y$  轴的转角  $\psi_r^*$  和  $\psi_\theta^*$ , 垂直于变形前板中面的平移  $w^*$ ) 的参数, 它们之间的关系为

$$\begin{cases} \psi_r^* = \frac{b_0}{R} \\ \psi_\theta^* = -\frac{a_0}{R} \\ w^* = w_0 + a_0 \frac{r}{R} \cos \theta + b_0 \frac{r}{R} \sin \theta \end{cases} \quad (8.4)$$

其中直角坐标系中 (微小) 转角  $\psi_x$  和  $\psi_y$  与极坐标系中的 (微小) 转角  $\psi_r$  和  $\psi_\theta$  之间的几何关系如图 8.1 所示。注意到为了与常内力三角形常规单元相连接, 此处  $\psi_x$  和  $\psi_y$  的转向规定是按文献 [85], 与本书图 5.2 的规定不同。

参见式 (6.16) ~ (6.18), 当位移模式 (8.1) ~ (8.3) 中  $N$  取 4,  $\tilde{N}$  取 2 时, 各待定常数的对应关系为

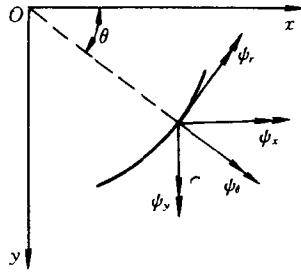


图 8.1 转角的坐标变换

$$\begin{aligned}
 a_1 &= A_1^{(\frac{1}{2})} R^{\frac{3}{2}}, & a_2 &= A_1^{(1)} R^2, & a_3 &= A_1^{(\frac{3}{2})} R^{\frac{5}{2}} \\
 a_4 &= A_1^{(2)} R^3, & \tilde{a}_1 &= D_1^{(1)} R, & \tilde{a}_2 &= D_1^{(2)} R^2 \\
 b_1 &= A_2^{(\frac{1}{2})} R^{\frac{3}{2}}, & b_2 &= A_2^{(1)} R^2, & b_3 &= A_2^{(\frac{3}{2})} R^{\frac{5}{2}} \\
 b_4 &= A_2^{(2)} R^3, & \tilde{b}_1 &= D_2^{(1)} R^{\frac{1}{2}}, & \tilde{b}_2 &= D_2^{(\frac{3}{2})} R^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

相应的形函数为

$$F_{r_1} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{3}{2} \theta - \frac{5 - 3\nu}{1 + \nu} \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$F_{r_2} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right) \left( \cos 2\theta + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \right)$$

$$F_{r_3} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \cos \frac{5}{2} \theta + \frac{3 - 5\nu}{1 + \nu} \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$F_{r_4} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \left[ \cos 3\theta + \frac{1 - 3\nu}{3(1 + \nu)} \cos \theta \right]$$

$$\tilde{F}_{r_1} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \frac{k^2}{2} (\cos 3\theta - \cos \theta)$$

$$\tilde{F}_{r_2} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^3 \frac{2}{3} k^2 (\cos 4\theta - \cos 2\theta)$$

$$F_{\theta_1} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \left( -\sin \frac{3}{2} \theta + \frac{7 - \nu}{1 + \nu} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$F_{\theta_2} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right) (-\sin 2\theta)$$

$$F_{\theta_3} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \left( -\sin \frac{5}{2}\theta + \frac{9+\nu}{1+\nu} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$F_{\theta_4} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \left[ -\sin 3\theta + \frac{5+\nu}{3(1+\nu)} \sin \theta \right]$$

$$\tilde{F}_{\theta_1} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \frac{3}{2} k^2 \left( -\frac{1}{3} \sin 3\theta + \sin \theta \right)$$

$$\tilde{F}_{\theta_2} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^3 \frac{4}{3} k^2 \left( \sin 2\theta - \frac{1}{2} \sin 4\theta \right)$$

$$F_{w_1} = \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ -\frac{2(1-\nu)}{1+\nu} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{2(7+\nu)}{3(1+\nu)} \cos \frac{3}{2}\theta \right]$$

$$F_{w_2} = \left( \frac{r}{R} \right)^2 \left[ \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right]$$

$$F_{w_3} = \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{5}{2}} \left[ \frac{2(1-\nu)}{(1+\nu)} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{2(9-\nu)}{5(1+\nu)} \cos \frac{5}{2}\theta \right]$$

$$F_{w_4} = \left( \frac{r}{R} \right)^3 \left[ \frac{1-\nu}{3(1+\nu)} \cos \theta + \frac{1+3\nu}{9(1+\nu)} \cos 3\theta \right]$$

$$\tilde{F}_{w_1} = \frac{r}{R} \cos \theta \quad \tilde{F}_{w_2} = \left( \frac{r}{R} \right)^2 \cos 2\theta$$

$$G_{r_1} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sin \frac{3}{2}\theta - \frac{5-3\nu}{3(1+\nu)} \sin \frac{\theta}{2} \right] \quad G_{r_2} = 0$$

$$G_{r_3} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ \sin \frac{5}{2}\theta + \frac{3-5\nu}{5(1+\nu)} \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

$$G_{r_4} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \left( \sin 3\theta + \frac{1-3\nu}{1+\nu} \sin \theta \right)$$

$$\tilde{G}_{r_1} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{k^2}{3} \left( \sin \frac{5}{2}\theta - \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\tilde{G}_{r_2} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{3k^2}{5} \left( \sin \frac{7}{2}\theta - \sin \frac{3}{2}\theta \right)$$

$$G_{\theta_1} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \cos \frac{3}{2}\theta - \frac{7-\nu}{3(1+\nu)} \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad G_{\theta_2} = \frac{1}{R} \frac{r}{R}$$

$$G_{\theta_3} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ \cos \frac{5}{2}\theta - \frac{9+\nu}{5(1+\nu)} \cos \frac{\theta}{2} \right]$$

$$G_{\theta_4} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \left( \cos 3\theta - \frac{5+\nu}{1+\nu} \cos \theta \right)$$

$$\tilde{G}_{\theta_1} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{k^2}{3} \left( \cos \frac{5}{2}\theta - 5 \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\tilde{G}_{\theta_2} = \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{k^2}{5} \left( -7 \cos \frac{3}{2}\theta + 3 \cos \frac{7}{2}\theta \right)$$

$$G_{w_1} = \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ -\frac{2(1-\nu)}{3(1+\nu)} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{2(5+3\nu)}{9(1+\nu)} \sin \frac{3}{2}\theta \right]$$

$$G_{w_2} = \left( \frac{r}{R} \right)^2 \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$G_{w_3} = \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{5}{2}} \left[ \frac{2(1-\nu)}{5(1+\nu)} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{2(3+5\nu)}{25(1+\nu)} \sin \frac{5}{2}\theta \right]$$

$$G_{w_4} = \left( \frac{r}{R} \right)^3 \left[ \frac{1-\nu}{1+\nu} \sin \theta - \frac{5-\nu}{3(1+\nu)} \sin 3\theta \right]$$

$$\tilde{G}_{w_1} = \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \quad \tilde{G}_{w_2} = \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \sin \frac{3}{2}\theta$$

在上述表达式中,由式(6.24)给出的  $k^2$  已无量纲化:  $k^2 = R^2/(2h^2)$ ,  $h$  为板厚,  $\nu$  为泊松比。

下面为着表示的方便,将位移函数(8.1)~(8.3)记为

$$w = \sum_{i=1}^{N+\bar{N}} [a_i F_{w_i}(r, \theta) + b_i G_{w_i}(r, \theta)] +$$



$$w_0 + a_0 \frac{r}{R} \cos \theta + b_0 \frac{r}{R} \sin \theta \quad (8.5)$$

$$\psi_r = \sum_{i=1}^{N+\bar{N}} [a_i F_{r_i}(r, \theta) + b_i G_{r_i}(r, \theta)] + \frac{a_0}{R} \cos \theta + \frac{b_0}{R} \sin \theta \quad (8.6)$$

$$\psi_\theta = \sum_{i=1}^{N+\bar{N}} [a_i F_{\theta_i}(r, \theta) + b_i G_{\theta_i}(r, \theta)] - \frac{a_0}{R} \sin \theta + \frac{b_0}{R} \cos \theta \quad (8.7)$$

其中当  $i > N$  时, 已设  $i = N + j$ , 且

$$a_{N+j} = \tilde{a}_j \quad b_{N+j} = \tilde{b}_j \quad (8.8)$$

$$\begin{cases} F_{w(N+j)} = \tilde{F}_{w_j} & G_{w(N+j)} = \tilde{G}_{w_j} \\ F_{r(N+j)} = \tilde{F}_{r_j} & G_{r(N+j)} = \tilde{G}_{r_j} \\ F_{\theta(N+j)} = \tilde{F}_{\theta_j} & G_{\theta(N+j)} = \tilde{G}_{\theta_j} \end{cases} \quad (8.9)$$

## § 8.2 奇异元的刚度矩阵

参阅第五章, 在极坐标下, Reissner 型板弯曲的广义曲率  $\{\chi\}$  与平均横向剪切应变  $\{\gamma\}$  能够表示为

$$\{\chi\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \psi_r}{\partial r} \\ -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \psi_r \right) \\ -\left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} \right) \end{array} \right\} \quad (8.10)$$

$$\{\gamma\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial r} - \psi_r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi_\theta \end{array} \right\} \quad (8.11)$$

将位移函数(8.5)~(8.7)代入式(8.10)和(8.11),得到

$$\{\chi\} = [B]\{\delta\} \quad (8.12)$$

$$\{\gamma\} = [\hat{B}]\{\delta\} \quad (8.13)$$

其中 $\{\delta\}$ 是以位移函数中待定系数为元素的广义位移向量

$$\{\delta\} = [a_1, a_2, \dots, a_{N+N}, b_1, b_2, \dots, b_{N+N}, w_0, a_0, b_0]^T \quad (8.14)$$

其中上标  $T$  表示转置。式(8.12)和(8.13)中矩阵 $[B]$ 和 $[\hat{B}]$ 由相应的形函数通过合适的微分求得

$$[B] = [B_1^1, B_2^1, \dots, B_{N+N}^1, B_1^2, B_2^2, \dots, B_{N+N}^2, 0, 0, 0] \quad (8.15)$$

$$[\hat{B}] = [\hat{B}_1^1, \hat{B}_2^1, \dots, \hat{B}_{N+N}^1, \hat{B}_1^2, \hat{B}_2^2, \dots, \hat{B}_{N+N}^2, 0, 0, 0] \quad (8.16)$$

其中

$$B_i^1 = \begin{Bmatrix} B_{1i}^1 \\ B_{2i}^1 \\ B_{3i}^1 \end{Bmatrix} = - \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_{ri}}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial F_{\theta i}}{\partial \theta} + \frac{F_{ri}}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial F_{ri}}{\partial \theta} + \frac{\partial F_{\theta i}}{\partial r} - \frac{F_{\theta i}}{r} \end{array} \right\} \quad (8.17)$$

$$B_i^2 = \begin{Bmatrix} B_{1i}^2 \\ B_{2i}^2 \\ B_{3i}^2 \end{Bmatrix} = - \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G_{ri}}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial G_{\theta i}}{\partial \theta} + \frac{G_{ri}}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial G_{ri}}{\partial \theta} + \frac{\partial G_{\theta i}}{\partial r} - \frac{G_{\theta i}}{r} \end{array} \right\} \quad (8.18)$$

$$\hat{B}_i^1 = \begin{Bmatrix} \hat{B}_{1i}^1 \\ \hat{B}_{2i}^1 \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_{wi}}{\partial r} - F_{ri} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial F_{wi}}{\partial \theta} - F_{\theta i} \end{array} \right\} \quad (8.19)$$

$$\hat{B}_i^2 = \begin{Bmatrix} \hat{B}_{1i}^2 \\ \hat{B}_{2i}^2 \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G_{wi}}{\partial r} - G_{ri} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial G_{wi}}{\partial \theta} - G_{\theta i} \end{array} \right\} \quad (8.20)$$

板的弯矩  $M_r, M_\theta$  和扭矩  $M_{r\theta}$  组成的内力矩阵 $\{M\}$ 可以表示为

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}D \end{bmatrix} \{\chi\} = [D_B]\{\chi\} \quad (8.21)$$

矩阵元素  $D$  为板的弯曲刚度

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (8.22)$$

$E$  为拉压弹性模量,  $h$  为板厚,  $\nu$  为泊松比。

板的剪力矩阵则可以写为

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_r \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \{\gamma\} = [D_s]\{\gamma\} \quad (8.23)$$

式中矩阵元素  $C$  为板的剪切刚度

$$C = \frac{5}{6}Gh \quad (8.24)$$

$G$  为剪切弹性模量。

奇异单元的应变能够表示为

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\chi\}^T \{M\} dA + \frac{1}{2} \int_A \{\gamma\}^T \{Q\} dA \quad (8.25)$$

将式(8.21)和(8.23)代入上式,得到

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\chi\}^T [D_B] \{\chi\} dA + \frac{1}{2} \int_A \{\gamma\}^T [D_s] \{\gamma\} dA \quad (8.26)$$

再将式(8.12)和(8.13)代入上式,得到

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \left( \int_A [B]^T [D_B] [B] dA + \int_A [\dot{B}]^T [D_s] [\dot{B}] dA \right) \{\delta\} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K]^* \{\delta\} \quad (8.27)$$

式中  $[K]^*$  即为奇异单元的刚度矩阵。显然它是两个矩阵之和

$$[K]^* = [K]_B + [K]_s \quad (8.28)$$

其中  $[K]_B$  对应于板的弯曲变形,  $[K]_s$  对应于板的剪切变形

$$[K]_B = \int_A [B]^T [D_B] [B] dA \quad (8.29)$$

$$[K]_s = \int_A [\dot{B}]^T [D_s] [\dot{B}] dA \quad (8.30)$$

将式(8.15)~(8.20)代入式(8.29)和(8.30),并注意到位移函数能够分解为对称与反对称模式,  $[K]_b$  和  $[K]_s$  能够写为

$$[K]_b = \begin{bmatrix} [K]_b^1 & 0 & 0 \\ 0 & [K]_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} N + \tilde{N} \text{ 行} \\ N + \tilde{N} \text{ 行} \\ 3 \text{ 行} \end{array}$$

$N + \tilde{N} \text{ 列} \quad N + \tilde{N} \text{ 列} \quad 3 \text{ 列} \quad (8.31)$

$$[K]_s = \begin{bmatrix} [K]_s^1 & 0 & 0 \\ 0 & [K]_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} N + \tilde{N} \text{ 行} \\ N + \tilde{N} \text{ 行} \\ 3 \text{ 行} \end{array}$$

$N + \tilde{N} \text{ 列} \quad N + \tilde{N} \text{ 列} \quad 3 \text{ 列} \quad (8.32)$

式中子矩阵的上标 1 和 2 分别对应于对称和反对称模式,并且这 4 个非零子矩阵的计算是不耦合的。设  $[K]_b^l = [K_{ij}]_b^l$ ,  $[K]_s^l = [K_{ij}]_s^l$ , 那么各非零子矩阵的计算公式如下

$$[K_{ij}]_b^l = D \int_A [B_{1i}' B_{1j}' + B_{2i}' B_{2j}' + \nu (B_{1i}' B_{2j}' + B_{2i}' B_{1j}') + \frac{1+\nu}{2} B_{3i}' B_{3j}'] dA$$

$l = 1, 2; \quad i, j = 1, 2, \dots, N + \tilde{N} \quad (8.33)$

$$[K_{ij}]_s^l = C \int_A (\dot{B}_{1i}' \dot{B}_{1j}' + \dot{B}_{2i}' \dot{B}_{2j}') dA$$

$l = 1, 2; \quad i, j = 1, 2, \dots, N + \tilde{N} \quad (8.34)$

对于一个圆形奇异单元,式(8.33)和(8.34)中的积分可以求得封闭公式。表 8.1~8.4 中列出了矩阵(8.31)和(8.32)中 4 个子矩阵各元素的显式公式。其中表 8.1 和表 8.2 相应于对称变形,表 8.3 和表 8.4 相应于反对称变形。

表 8.1 奇异元刚度子矩阵  $[K]_k (N=4, \bar{N}=2)$ 

$\frac{2\pi(1-\nu)(5-3\nu)}{1+\nu}$					
$-\frac{64(1-\nu)(2-3\nu)}{15(1+\nu)}$	$\frac{4\pi(1-\nu)}{1+\nu}$				
$-\frac{12(1-\nu)^2\pi}{1+\nu}$	$\frac{64(1-\nu)(2-\nu)}{5(1+\nu)}$	$\frac{6\pi(5-3\nu)(1-\nu)}{1+\nu}$	对称		
$-\frac{256(1-\nu)(6-\nu)}{315(1+\nu)}$	0	$\frac{256(1-\nu)(6+\nu)}{105(1+\nu)}$		$\frac{16\pi(1-\nu)(3+2\nu)}{9(1+\nu)}$	
$-\frac{256(1-\nu)k^2}{105}$	0	$\frac{256k^2(1-\nu)}{35}$		$\frac{8k^2\pi(1-\nu)}{3}$	$2k^4\pi(1-\nu)$
$-\frac{512(1-\nu)k^2}{315}$	$-2k^2\pi(1-\nu)$	$-\frac{512k^2(1-\nu)}{63}$		0	$\frac{16}{3}(1-\nu)k^4\pi$
$\frac{D}{R^2}$					

表 8.2 奇异元刚度子矩阵  $[K]_k (N=4, \bar{N}=2)$ 

$\frac{112\pi}{3(1+\nu)^2}$					
0	0				
$\frac{16\pi}{(1+\nu)^2}$	0	$\frac{304\pi}{5(1+\nu)^2}$	对称		
$\frac{8192}{567(1+\nu)^2}$	0	$\frac{8192}{495(1+\nu)^2}$	$\frac{8\pi}{9(1+\nu)^2}$		
$\frac{256(63+40k^2)}{945(1+\nu)}$	0	$\frac{256}{1+\nu} \left( \frac{1}{21} + \frac{8k^2}{165} \right)$	$\frac{2(1+k^2)\pi}{3(1+\nu)}$	$(1+k^2 + \frac{1}{2}k^4)\pi$	
$\frac{1024}{1+\nu} \left( \frac{1}{105} + \frac{4k^2}{1485} \right)$	0	$-\frac{1024}{1+\nu} \left( \frac{1}{45} + \frac{4k^2}{455} \right)$	0	0	$(2 + \frac{4}{3}k^2 + \frac{7}{18}k^4)\pi$

C

表 8.3 奇异元刚度子矩阵  $[K]_{ij}^2$ 

$\frac{2\pi(9+\nu)(1-\nu)}{9(1+\nu)}$					
0	0				
$-\frac{4\pi(1-\nu)^2}{5(1+\nu)}$	$\frac{6\pi(17+9\nu)(1-\nu)}{25(1+\nu)}$	对称			
$-\frac{512(6-\nu)(1-\nu)}{315(1+\nu)}$	$\frac{512(1-\nu)(6+\nu)}{175(1+\nu)}$	$\frac{16\pi(1-\nu)}{(1+\nu)}$			
0	$\frac{6k^2\pi(1-\nu)}{5}$	$\frac{512k^2(1-\nu)}{105}$	$\frac{2\pi k^4(1-\nu)}{3}$		
$-\frac{4}{5}k^2(1-\nu)\pi$	0	$\frac{512k^2(1-\nu)}{45}$	0	$\frac{18k^4(1-\nu)\pi}{5}$	

 $\frac{D}{R^2}$

表 8.4 奇异元刚度子矩阵  $[K]_3^2$ 

$\frac{16\pi}{9(1+\nu)^2}$					
$-\frac{512}{315(1+\nu)}$	$\pi$				
$\frac{16\pi}{15(1+\nu)^2}$	$-\frac{512}{225(1+\nu)}$	$\frac{112\pi}{125(1+\nu)^2}$	对称		
$\frac{60416}{8505(1+\nu)^2}$	0	$\frac{287744}{63525(1+\nu)^2}$	$\frac{40\pi}{3(1+\nu)^2}$		
$\frac{2(3+4k^2)\pi}{9(1+\nu)}$	$-\frac{144+256k^2}{135}$	$\frac{(30+56k^2)\pi}{75(1+\nu)}$	$\frac{32(13431+31472k^2)}{266805(1+\nu)}$	$(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}k^2 + \frac{28}{45}k^4)\pi$	
$\frac{(10+4k^2)\pi}{15(1+\nu)}$	$\frac{528+256k^2}{231}$	0	$\frac{838240+603648k^2}{114075(1+\nu)}$	0	$(-\frac{3}{2} + \frac{6}{5}k^2 + \frac{76}{175}k^4)\pi$

注:  $D$  为板的弯曲刚度;  $C$  为横向剪切刚度;  $k^2 = R^2/(2h^2)$ ;  $R$  为奇异元半径;  $h$  为板厚。



如果构造的裂纹尖端奇异单元为其它形状,例如常用到的矩形单元,那么一般地说,计算奇异元刚度矩阵时需要采用数值积分。由于被积函数中  $r$  和  $\theta$  是分离的,容易由解析法完成对  $r$  的积分。这样将数值积分从二维化成一维,消除了被积函数的奇异性,能够有效地减少计算工作量和提高精度。

### § 8.3 奇异单元与常规单元的连接

根据位于奇异单元边界的常规单元节点处,两单元的广义位移相等的条件,导出一个常规单元刚度矩阵的转换矩阵,然后将位于奇异元边界的常规元节点位移用奇异元的广义位移代替,是实现奇异元与常规元连接的一个常用方法。

极坐标下奇异元的位移模式已由式(8.5)~(8.7)给出。由于转角微小,可以作为矢量。根据图 8.1,在极坐标与直角坐标下转角的变换关系为

$$\begin{cases} \psi_x = \psi_r \sin\theta + \psi_\theta \cos\theta \\ \psi_y = -\psi_r \cos\theta + \psi_\theta \sin\theta \end{cases} \quad (8.35)$$

注意图 8.1 中  $\psi_x$  和  $\psi_y$  的转角是按介绍常内力三角形元的文献[85]的规定,与本书其它地方对 Reissner 型板的  $\psi_x$  和  $\psi_y$  的转向规定(参见图 5.1 和 5.2)不同。

参见图 8.2,假设一个常内力三角形单元的两个节点,例如  $j$  和  $k$  在奇异元边界上,则常规元在节点  $j$  的位移矢量  $[\omega_j, \psi_{xj}, \psi_{yj}]^T$  就能由奇异元的广义位移矢量表示

$$\begin{Bmatrix} \omega_j \\ \psi_{xj} \\ \psi_{yj} \end{Bmatrix} = [\Omega_j] \{\delta\} \quad (8.36)$$

其中  $\{\delta\}$  是由式(8.14)所给出的广义位移矢量,而

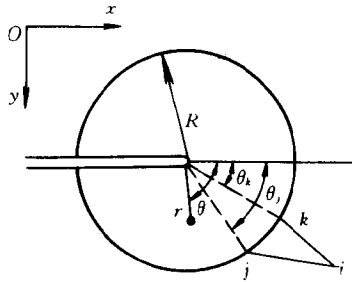


图 8.2 奇异元与常规三角形的连接

$$[\Omega_j] = \begin{bmatrix} f_1^1, f_2^1, \dots, f_{N+\tilde{N}}^1, f_1^2, f_2^2, \dots, f_{N+\tilde{N}}^2, 1, \cos\theta_j, \sin\theta_j \\ g_1^1, g_2^1, \dots, g_{N+\tilde{N}}^1, g_1^2, g_2^2, \dots, g_{N+\tilde{N}}^2, 0, 0, 1/R \\ h_1^1, h_2^1, \dots, h_{N+\tilde{N}}^1, h_1^2, h_2^2, \dots, h_{N+\tilde{N}}^2, 0, -1/R, 0 \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

其中

$$\begin{cases} f_s^1 = F_{ws}(R, \theta_j) \\ f_s^2 = G_{ws}(R, \theta_j) \end{cases} \quad s = 1, 2, \dots, N + \tilde{N} \quad (8.38)$$

$$\begin{cases} g_s^1 = F_{rs}(R, \theta_j)\sin\theta_j + F_{\theta s}(R, \theta_j)\cos\theta_j \\ g_s^2 = G_{rs}(R, \theta_j)\sin\theta_j + G_{\theta s}(R, \theta_j)\cos\theta_j \end{cases} \quad s = 1, 2, \dots, N + \tilde{N} \quad (8.39)$$

$$\begin{cases} h_s^1 = -F_{rs}(R, \theta_j)\cos\theta_j + F_{\theta s}(R, \theta_j)\sin\theta_j \\ h_s^2 = -G_{rs}(R, \theta_j)\cos\theta_j + G_{\theta s}(R, \theta_j)\sin\theta_j \end{cases} \quad s = 1, 2, \dots, N + \tilde{N} \quad (8.40)$$

同样地, 可以将常规元在节点  $k$  的位移分量  $[\tau_{wk}, \psi_{rk}, \psi_{\theta k}]^T$  由奇异元的广义位移矢量表示

$$\begin{Bmatrix} \psi_k \\ \psi_{xk} \\ \psi_{yk} \end{Bmatrix} = [\Omega_k] \{\delta\} \quad (8.41)$$

为求 $[\Omega_k]$ , 只须将式(8.37)~(8.40)中所有下标  $j$  换成  $k$  即可。

用 $\{\delta\}^e$  表示常内力三角形板元  $ijk$  (如图 8.2) 的节点位移矢量

$$\{\delta\}^e = [w_i, \psi_{xi}, \psi_{yi}, w_j, \psi_{xj}, \psi_{yj}, w_k, \psi_{xk}, \psi_{yk}]^T \quad (8.42)$$

并用 $\{\hat{\delta}\}^e$  表示在  $j$  和  $k$  的位移分量由奇异元的广义节点位移分量取代后的常内力三角形板元  $ijk$  的广义节点位移矢量

$$\{\hat{\delta}\}^e = [w_i, \psi_{xi}, \psi_{yi}, a_1, \dots, a_{N+\tilde{N}}, b_1, \dots, b_{N-\tilde{N}}, w_0, a_0, b_0]^T \quad (8.43)$$

则利用关系式(8.36)和(8.41), 能够建立 $\{\delta\}^e$  与 $\{\hat{\delta}\}^e$  之间的关系

$$\{\delta\}^e = [\Omega] \{\hat{\delta}\}^e \quad (8.44)$$

其中转换矩阵 $[\Omega]$ 为

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} [I] & & 0 \\ 0 & & [\Omega_j] \\ 0 & & [\Omega_k] \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \text{ 行} \\ 3 \text{ 行} \\ 3 \text{ 行} \end{matrix} \quad (8.45)$$

3 列                       $2N + 2\tilde{N} + 3$  列

其中 $[I]$ 是三阶单位矩阵。

常内力三角形板元的应变能也能写成式(8.27)的形式

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^{eT} [K]^e \{\delta\}^e \quad (8.46)$$

其中 $[K]^e$  是对应于位移矢量 $\{\delta\}^e$  的单元刚度矩阵。将式(8.44)代入式(8.46), 得到

$$U = \frac{1}{2} \{\hat{\delta}\}^{eT} [\Omega]^T [K]^e [\Omega] \{\hat{\delta}\}^e \quad (8.47)$$

显然

$$\{K\}^e = [\Omega]^T [K]^e [\Omega] \quad (8.48)$$

是对应于广义位移矢量  $\{\delta\}^e$  的单元刚度矩阵。容易看出,  $\{K\}^e$  与相邻奇异元刚度矩阵  $\{K\}^e$ , 与相邻常规元刚度矩阵  $[K]^e$  的装配能够按照标准有限元步骤, 按对号入座的原则进行, 形成总刚度矩阵。在总的位移矢量中, 位于奇异元边界的常规元节点位移不出现。

如果常内力三角形板元仅有一个节点在奇异元边界上, 容易按同样的方式获得转换矩阵(参见 § 4.3)。

#### § 8.4 应力强度因子的计算

从 § 8.1 中可以看到, 为了使公式简洁, 裂纹尖端奇异元的广义位移矢量与裂纹尖端广义位移场展开式的待定系数之间有一个常数乘子的差别, 其中表征主奇异项的三个位移分量与展开式中相应三个待定常数之间的关系为

$$\begin{cases} A_1^{(\frac{1}{2})} = R^{-\frac{3}{2}} a_1 \\ A_1^{(\frac{1}{2})} = R^{-\frac{3}{2}} b_1 \\ D_2^{\frac{1}{2}} = R^{-\frac{1}{2}} \bar{b}_1 = R^{-\frac{1}{2}} b_5 \end{cases} \quad (8.49)$$

其中第三式中  $b_5$  的编号仅对应于表 8.1~8.4 所给出的刚度矩阵。将式(8.49)代入式(6.30), 得到

$$\begin{cases} K_1 = 2 \sqrt{2\pi Gh} R^{-3/2} a_1 \\ K_2 = -\frac{2}{3} \sqrt{2\pi Gh} R^{-3/2} b_1 \\ K_3 = \frac{5}{8} \sqrt{2\pi GR}^{-1/2} \bar{b}_1 \end{cases} \quad (8.50)$$

在表 8.1~8.4 给出的刚度矩阵中

$$\bar{b}_1 = b_5 \quad (8.51)$$

## § 8.5 关于奇异元的形状与应力杂交奇异元

### 1. 关于奇异元的形状

利用 Reissner 型板裂纹尖端场一般展开式可以构造各种形状的奇异元。从实用的角度,我们考察了圆形与矩形奇异元,都获得了满意的结果。

圆形的奇异元与常内力三角形元<sup>[85]</sup>结合,公式简单,能够获得奇异元与常规元的刚度矩阵的显式公式,便于分析具有较复杂的边界条件和随意排列的多条裂纹问题。但是为了反映在奇异元邻近仍然比较大的应力应变梯度,奇异元周围必须划分较密的常内力三角形单元网格。一般为了得到较满意的精度,奇异元边界上必须设置 40 个左右的常内力三角形元的节点。

如果是矩形板,且裂纹又垂直或平行于板的边界时,矩形的奇异元与矩形的常规元相结合通常有最佳效果。此时奇异元刚度矩阵的形成除了积分域形状的不同外,其余均与圆形奇异元的相同。图 8.3 给出了我们计算时的一种网格布置<sup>[42]</sup>,其中常规元为 20 节点的厚板单元<sup>[86]</sup>,每个节点上有五个自由度  $w, \psi_x, \psi_y, \gamma_x$  和  $\gamma_y$ 。 $\gamma_x$  代表  $x$  为常数的截面上的平均横向剪应变, $\gamma_y$  代表  $y$  为常数的截面上的相应量,原来它们并不独立,可以由  $\psi_x, \psi_y$  和  $w$  导出

$$\begin{cases} \gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \\ \gamma_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \end{cases} \quad (8.52)$$

为了提高插值精度,被作为节点参数引入。

### 2. 关于应力杂交元

为了提高应力分析的精度,也可以与建立常规单元的应力杂交元一样,建立应力杂交奇异元。应力杂交法是在单元内部假定一个应力场,而在单元边界上假设另外一个协调的位移场,用最小余能原理求解。1982 年, Rhee 和 Atluri<sup>[87]</sup>曾发表了一篇关于用应力

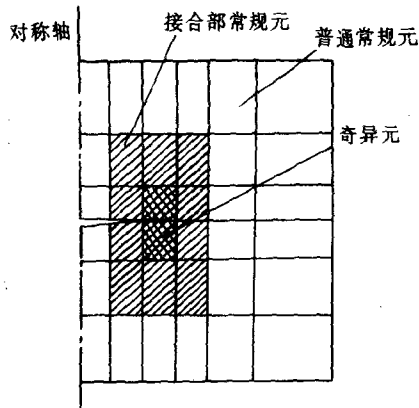


图 8.3 矩形奇异元与常规元的网格划分

杂交法构造 Reissner 型板裂纹尖端奇异元的论文。计算了对称 I 型的问题。由于他们尚不知道我们在 Reissner 型板裂纹尖端场一般展开式研究方面所取得的进展,所假定的应力场仅采用了应力场展开式的首项。为了增大奇异元尺寸,他们再叠加一个多项式应力场。一般地说,这样的多项式应力场的选择需要经验与技巧,还需要通过计算来判别其精度;同时这样作需在裂纹尖端附近设置几个奇异元,进一步增大了问题的复杂性。可见,不采用裂纹尖端场一般展开式所构造的应力杂交奇异元是不很实用的。李英治<sup>[51]</sup>在他的博士学位论文中利用 Reissner 型板在裂纹尖端附近的一般展开式构造应力杂交奇异元,取得了十分满意的结果,特别是 II 型应力强度因子  $K_2$  的精度有较大的提高。它表明,在第六章和第七章所推导的 Reissner 型板裂纹尖端场一般展开式同样为发展性能优良的裂纹尖端应力杂交奇异元打下了理论基础。

## 第九章 含裂纹 Reissner 型板的典型 问题解答及比较

本章将采用局部-整体法对含裂纹 Reissner 型板的典型问题进行计算、比较和讨论,以说明这个方法的效率、精度和优越性。此外,还介绍了计算 Reissner 型板的应力强度因子的一组近似方程和近似解法。

### § 9.1 局部-整体法与其它解析和 数值法的结果比较

#### 1. 计算对象

如图 9.1 所示,计算对象为长  $2L$ ,宽  $2W$ ,厚  $h$ ,含长  $2a$  的中心裂纹的矩形板。考虑两种典型受载情形:(a)对称问题,板周边受均匀弯矩  $M$ 。(b)反对称问题,板周边受均匀扭矩  $M_{xy}$ 。

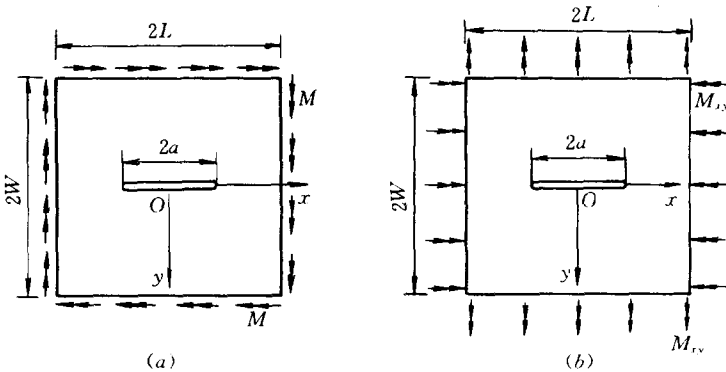


图 9.1 含中心裂纹板的两种典型受载情形

## 2. 对称问题的结果比较

文献[23,24]采用积分变换的方法研究了无限大板在远处受均匀弯矩  $M$  的问题,得出长  $2a$  的裂纹尖端的应力强度因子公式为

$$K_1(z) = \frac{12z}{h^3} \Phi(1) M \sqrt{\pi a} \quad (9.1)$$

它的最大值  $K_1$  发生在板面  $z=h/2$  处

$$K_1 = \Phi(1) \frac{6M}{h^2} \sqrt{\pi a} \quad (9.2)$$

其中函数  $\Phi(1)$  依赖于  $h/a$  与泊松比,已由文献[24]给出了计算结果。

为了能与无限大板的结果进行比较,有限尺寸板必须取得足够大,使板的边界影响可以忽略。对于图 9.1(a)所示的板,取板长  $2L$  等于板宽  $2W$ , 并取  $h=1\text{cm}$ ,  $a=0.9\text{cm}$ ,  $M=10\text{N}\cdot\text{cm}/\text{cm}$ ,  $\nu=0.3$ 。从后面表 9.3 对于板边长  $2W=2L=20a$  和  $40a$  两种情形的数值结果可以看到,两种不同板边长下求得的应力强度因子之值仅相差 0.4%。因此认为用边长为  $20a$  的含裂纹板来模拟无限大含裂纹板不致于有显著的误差。图 9.2 给出了局部-整体法<sup>[42]</sup>与裂纹尖端畸变等参元<sup>[35]</sup>及解析解<sup>[24]</sup>的结果对照。可以看出,当  $h/$

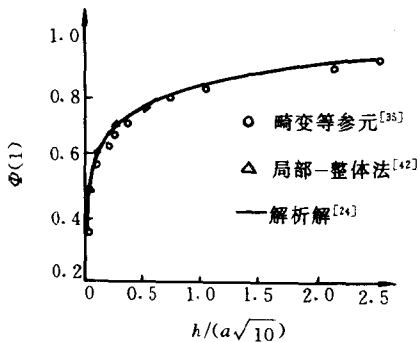


图 9.2 局部-整体法与其它解析与数值法的结果比较



$a > 1$  时,三种方法所得结果没有什么差别。随着板变薄,相对误差开始增加。采用由 Reissner 型板裂纹尖端场展开式构造的奇异元与常规元相结合的局部-整体法,即使对很薄的板,结果与解析解的误差也仅在 3% 左右;而采用裂纹尖端畸变等参元,误差达 13%。这个误差是由于畸变等参元仍然不能很好地描述裂纹尖端位移应力场引起的。它虽然在裂纹尖端形成了应力的  $r^{-1/2}$  阶奇异性,但却不能精确地反映真实应力场的角分布规律。我们还没有见到采用常规有限元法(包括在裂纹尖端引入畸变单元等的有限元法)能够十分理想地分析含裂纹 Reissner 型板的报道。建立在 Reissner 型板裂纹尖端场严格的理论分析基础上所发展的局部-整体法,是含裂纹 Reissner 型板分析的一个普遍适用又精确有效的方法。

表 9.1 对于不同的板厚,列出了采用矩形奇异元结合 20 节点参数矩形元(局部-整体法 1)、圆形奇异元结合常内力三角形元(局部-整体法 2)的计算结果,并与解析解作了比较。结果表明,所发展的不同形状的奇异单元,都可以得到令人满意的结果。

表 9.1 应力强度因子  $K_1/10N \cdot cm^{-3/2}$  的结果比较

方 法	$h/a=0.1$	$h/a=0.5$	$h/a=1$	$h/a=2$
局部-整体法 1	484.022	28.6137	7.8188	2.1626
局部-整体法 2		28.753	7.812	
解析法	499.832	28.4794	7.9181	2.1668
最大相对误差(%)	3.16	2.79	1.33	0.195

注:计算对象见图 9.1(a),取  $2L=2W=20a, a=1cm, M=10N \cdot cm/cm, \nu=0.3$ 。  
局部-整体法 1<sup>[42]</sup>指矩形奇异元与 20 节点参数矩形厚板元结合的方法;局部整体法 2<sup>[49]</sup>指圆形奇异元与常内力三角形元结合的方法。

### 3. 反对称问题的结果比较

Delale<sup>[88]</sup>曾用积分变换的方法求得了相应于图 9.1(b)的无限板在远处受均匀扭矩  $M_x$  时,在长  $2a$  的裂纹尖端的应力强度因

子。这是一个反对称问题,也是一个复合型断裂问题,Ⅱ型和Ⅲ型应力相复合。为了对照方便,引入无量纲应力强度因子  $\tilde{K}_2$  和  $\tilde{K}_3$

$$\tilde{K}_2 = K_2(h/2)/(6M_{xy} \sqrt{\pi a/h^2}) \quad (9.3)$$

$$\tilde{K}_3 = K_3(0)/(6M_{xy} \sqrt{\pi a/h^2}) \quad (9.4)$$

式中  $K_2(h/2)$  和  $K_3(0)$  分别为Ⅱ型和Ⅲ型应力强度因子的最大值,其中Ⅱ型的最大值发生在板面( $z = \pm h/2$ 处),Ⅲ型的最大值发生在板中面( $z = 0$ 处)。

与对称问题相比,对于反对称问题,板的边长要取得大得多,才能模拟无限大板。为此,取板的边长  $2L = 2W = 200a$ ,对于不同的板厚,图 9.1(b)所示的问题用局部-整体法<sup>[51]</sup>所得的结果列于表 9.2 中,并与解析结果<sup>[88]</sup>进行比较。图 9.3 通过曲线图显示了两种方法所得结果的对照,可以看出,二者能够很好地吻合。

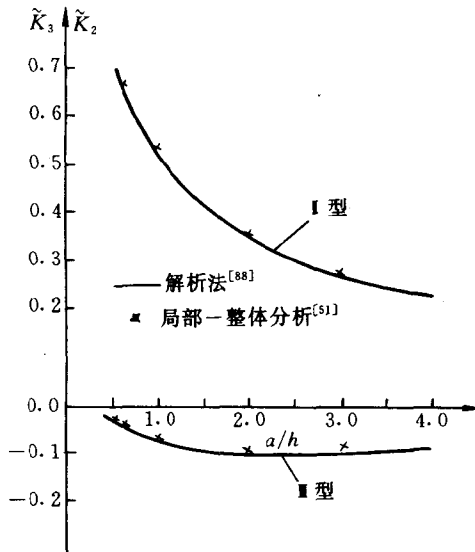


图 9.3 Ⅱ、Ⅲ复合型应力强度因子对照

表 9.2 无量纲应力强度因子  $\bar{K}_2$  和  $\bar{K}_3$  对照

方 法	$a/h=0.5$		$a/h=0.625$		$a/h=1$		$a/h=2$	
	$\bar{K}_2$	$\bar{K}_3$	$\bar{K}_2$	$\bar{K}_3$	$\bar{K}_2$	$\bar{K}_3$	$\bar{K}_2$	$\bar{K}_3$
局部-整体法 <sup>[51]</sup>	0.727	-0.034	0.676	-0.044	0.547	-0.067	0.369	-0.087
解析法 <sup>[88]</sup>	0.705	-0.036	0.659	-0.045	0.521	-0.070	0.352	-0.091
相对误差(%)	3.0	4.9	1.7	0.3	4.9	3.9	4.8	4.3
注: 计算对象见图 9.1(b), 取 $2L=2W=200a$ , 无量纲应力强度因子 $\bar{K}_2=K_2/(6M_{xy}\sqrt{\pi a}/h^2)$ , $\bar{K}_3=K_3/(6M_{xy}\sqrt{\pi a}/h^2)$ 。								

## § 9.2 边界对应力强度因子的影响

对于实际工程中的有限尺寸板, 了解边界对裂纹尖端附近的应力场的影响是很重要的。

### 1. 对称问题

上节已指出, 对于边界受均匀弯矩  $M$ , 含中心裂纹的方板, 当裂纹长度与板的边长之比  $a/L \leq 0.1$  时, 边界的影响已经甚微。取图 9.1(a) 所示板为计算对象, 方板边长  $2L$  取  $20a$  和  $40a$  时的应力强度因子之值列于表 9.3 中, 二者相差仅  $0.4\%$ 。为考察  $a/L > 0.1$  时边界对应力强度因子的影响, 表 9.4 中列出了不同厚度的 Reissner 型板在  $a/L$  的不同比值下的应力强度因子。在这两个表中均取  $2L=2W=20a$ ,  $M=10\text{N} \cdot \text{cm}/\text{cm}$ ,  $\nu=0.3$ 。为了更形象显示边界对应力强度因子的影响, 定义无量纲 I 型应力强度因子  $\bar{K}_1$

$$\bar{K}_1 = K_1 / (6M \sqrt{\pi a} / h^2) \quad (9.5)$$

$\bar{K}_1$  随  $a/L$  与  $h/a$  的变化示于图 9.4 和 9.5 中。在图 9.4 中同时画出了  $h/a=0$  和  $h/a=\infty$  时无量纲应力强度因子  $\bar{K}_1$  随  $a/L$  的变化规律。由于  $h/a=\infty$  时板的受力状态与平面应变问题相同, 所以  $h/a=\infty$  时的曲线是按平面断裂问题推算的。板厚为零时, Reissner 型板与 Kirchhoff 板的应力强度因子之比为  $(1+\nu)/(3+\nu)$ , 所以  $h/a=0$  时的曲线是由 Kirchhoff 板的相应曲线乘上  $(1+\nu)/(3+\nu)$  推算的。

从图 9.4 和 9.5 可以看出,随着  $a/L$  增大,无量纲应力强度因子  $\tilde{K}_I$  随之增大。在相同的  $a/L$  下,  $\tilde{K}_I$  则随  $h/a$  的增大而增大,当  $h/a = \infty$  时达到它的最大值,此最大值即平面断裂问题的相应值。

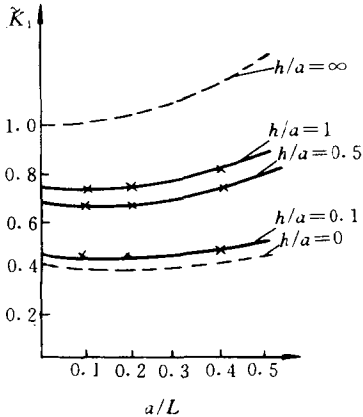


图 9.4 无量纲应力强度因子  $\tilde{K}_I$  随  $a/L$  变化

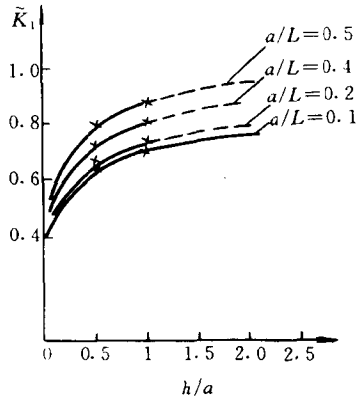
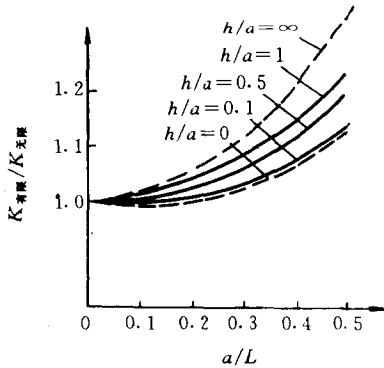


图 9.5 无量纲应力强度因子  $\tilde{K}_I$  随  $h/a$  变化

如果将无限大 Reissner 型板的 I 型应力强度因子用  $K_I^\infty$  表示,则  $K_I/K_I^\infty$  就是反映边界对 I 型应力强度因子影响的所谓有限尺寸影响系数。对于各种厚度的板,当  $a/L$  增大时,有限尺寸影响系数也随之增大,而且  $h/a$  越大,该系数增大更快一些。例如对于  $h/a = 0.1, 0.5, 1$  三种比值,当  $a/L = 0.4$  时,有限尺寸影响系数分别为 1.0676, 1.1154, 1.1320, 而当  $a/L = 0.5$  时,它们分别为 1.1358, 1.1947, 1.2231。图 9.6 显示了有限尺寸影响系数的变化规律。

表 9.3 边长很大的板的应力强度因子  $K_I/10\text{N} \cdot \text{cm}^{-3/2}$

$2L=20a$	$2L=40a$	相对误差
7.473003	7.439645	0.448%
注:计算对象见图 9.1(a),取 $a=0.9\text{cm}, h=1\text{cm}$ 。		

图 9.6 有限尺寸影响系数  $K_{有限}/K_{无限}$ 表 9.4 应力强度因子  $K_1/10N \cdot cm^{-3/2}$  随  $a/L$  变化

$\frac{a}{L}$	$K_1/10N \cdot cm^{-3/2}$		
	$h/a=0.1$	$h/a=0.5$	$h/a=1$
0.1	484.0218	28.6137	7.81876
0.2	497.3406	29.3607	8.05696
0.4	516.7353	31.9158	8.85120
0.5	549.7369	34.1858	9.56300

注:计算对象见图 9.1(a),取  $a=1cm$ 。

## 2. 反对称问题

当有限尺寸板承受反对称载荷时,为了探讨应力强度因子随边长和板厚变化,取图 9.1(b)所示方板( $L=W$ )为计算对象。对于不同的板厚,计算了  $a/L=0.01\sim 0.8$  范围内几种情况下的无量纲应力强度因子。Ⅱ型无量纲应力强度因子  $\tilde{K}_2$  列于表 9.5,Ⅲ型无量纲应力强度因子列于表 9.6,其中  $\tilde{K}_2$  和  $\tilde{K}_3$  的定义分别见式(9.3)和(9.4)。图 9.7 显示了  $\tilde{K}_2$  和  $\tilde{K}_3$  随  $a/L$  变化的曲线。

如果将无限大 Reissner 型板的Ⅱ型和Ⅲ型应力强度因子分别用  $K_2^\infty$  和  $K_3^\infty$  表示,则  $K_2/K_2^\infty$  和  $K_3/K_3^\infty$  可以分别称作Ⅱ型和Ⅲ型应力强度因子的有限尺寸影响系数。图 9.1(b)所示方板( $W$

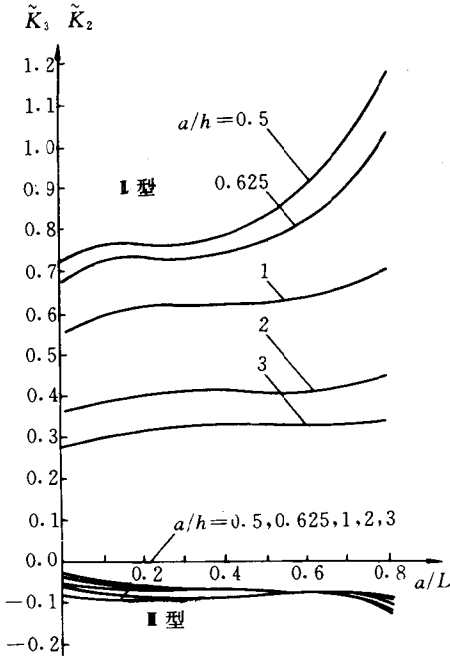


图 9.7 I 型和 II 型无量纲应力强度因子  $\tilde{K}_2$  和  $\tilde{K}_3$  的变化规律

$=L$ ) 的应力强度因子的有限尺寸影响系数列于表 9.7 和 9.8 中, 图 9.8 和 9.9 显示了它们的变化规律。

将图 9.6 与图 9.8 和 9.9 比较, 可以发现对称与反对称典型问题的有限尺寸影响系数的性态是不相同的。对于对称问题, 当  $a/L < 0.1$  时, 有限尺寸影响系数已经接近于 1, 表明边界的影响已经可以忽略; 而对于反对称问题, 有限尺寸影响系数在  $a/L = 0$  的附近的斜率是陡峭的,  $a/L$  要小于 0.01 才可以忽略边界的影响。对于对称问题,  $K_1$  的有限尺寸影响系数随着  $a/L$  增大而单调增加, 并且斜率也不断增大; 而对于反对称问题,  $K_2$  和  $K_3$  的有限尺寸影响系数虽也随  $a/L$  的增大而增大, 但在  $a/L = 0.2 \sim 0.6$  之间有一个相当平缓的区段 (对于  $K_3$  的有限尺寸影响系数, 在  $a/h < 1$  时除外), 当  $a/L > 0.6$  以后, 有限尺寸影响系数才又开始随

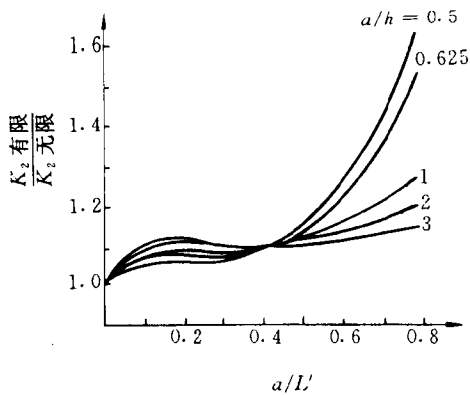


图 9.8 I 型应力强度因子的有限尺寸影响系数

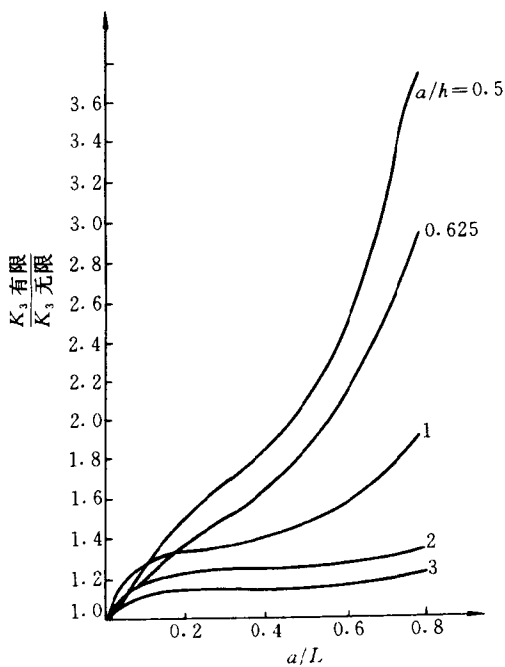


图 9.9 III 型应力强度因子的有限尺寸影响系数

$a/L$  的增加而显著增加。

表 9.5 II 型无量纲应力强度因子  $\bar{K}_2$  随  $a/L$  变化<sup>[51]</sup>

$\frac{a}{L}$	无量纲应力强度因子 $\bar{K}_2$				
	$a/h=0.5$	$a/h=0.625$	$a/h=1$	$a/h=2$	$a/h=3$
0.01	0.727	0.676	0.547	0.369	0.288
0.16	0.793	0.738	0.622	0.429	0.329
0.60	0.909	0.816	0.634	0.415	0.319
0.80	1.181	1.031	0.697	0.438	0.338

注: 计算对象见图 9.1(b), 取  $W=L$ , 无量纲应力强度因子  $\bar{K}_2$  的定义见式(9.3)。

表 9.6 III 型无量纲应力强度因子  $\bar{K}_3$  随  $a/L$  变化<sup>[51]</sup>

$\frac{a}{L}$	无量纲应力强度因子 $\bar{K}_3$				
	$a/h=0.5$	$a/h=0.625$	$a/h=1$	$a/h=2$	$a/h=3$
0.01	-0.034	-0.045	-0.067	-0.087	-0.088
0.16	-0.039	-0.051	-0.079	-0.102	-0.099
0.60	-0.051	-0.061	-0.085	-0.103	-0.100
0.80	-0.180	-0.132	-0.131	-0.117	-0.105

注: 计算对象见图 9.1(b), 取  $W=L$ , 无量纲应力强度因子  $\bar{K}_3$  的定义见式(9.4)。

表 9.7 II 型应力强度因子的有限尺寸影响系数<sup>[51]</sup>

$\frac{a}{L}$	有限尺寸影响系数 $K_2/K_2^\infty$				
	$a/h=0.5$	$a/h=0.625$	$a/h=1$	$a/h=2$	$a/h=3$
0.01	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.16	1.090	1.092	1.137	1.162	1.145
0.60	1.250	1.207	1.158	1.124	1.107
0.80	1.624	1.525	1.275	1.188	1.172

注: 计算对象见图 9.1(b), 取  $W=L$ , 无限大板的相应应力强度因子取自文献[88]。



表 9.8 III 型应力强度因子的有限尺寸影响系数<sup>[51]</sup>

$\frac{a}{L}$	有限尺寸影响系数 $K_3/K_3^0$				
	$a/h=0.5$	$a/h=0.625$	$a/h=1$	$a/h=2$	$a/h=3$
0.01	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.16	1.126	1.135	1.168	1.175	1.137
0.60	1.488	1.374	1.257	1.182	1.138
0.80	3.740	2.964	1.948	1.341	1.204

注:计算对象见图 9.1(b),取  $W=L$ ,无限大板的相应应力强度因子取自文献[88]。

### § 9.3 板的支承条件及长宽比的影响

#### 1. 支承条件对应力强度因子的影响

为了比较不同支承条件对应力强度因子的影响,计算了  $h/a=1$  的四边简支方板,并将其与四边自由的方板进行了比较。设想将图 9.1(a)所示的板换成四边简支,边界仍受均匀弯矩  $M_0$ 。取  $a=h=1\text{cm}$ ,  $W=L$ ,  $M=10\text{N}\cdot\text{cm}/\text{cm}$ ,  $\nu=0.3$ 。计算结果分别由表 9.9 和图 9.10 给出。

表 9.9 不同支承条件下的应力强度因子<sup>[42]</sup>

支承条件	应力强度因子 $K_1/10\text{N}\cdot\text{cm}^{-3/2}$			
	$a/L=0.1$	$a/L=0.2$	$a/L=0.4$	$a/L=0.5$
四边简支	5.246187	5.407619	5.736731	5.776664
四边自由	7.818764	8.056962	8.851205	9.563001
百分相差(%)	32.9	32.9	35.2	39.6

注:计算对象见图 9.1(a)(换成四边简支)。取  $a=h=1\text{cm}$ ,  $W=L$ ,  $M=10\text{N}\cdot\text{cm}/\text{cm}$ ,  $\nu=0.3$ 。

从表和图可以看出,当几何尺寸相同时,在同样的均匀边界弯矩作用下,简支板的应力强度因子比自由板的应力强度因子小 30%~40%,即使在  $a/L$  很小时也是如此。此外,简支板的有限尺寸影响系数亦与自由板的有所不同。对于自由板,当  $a/L$  增大时,

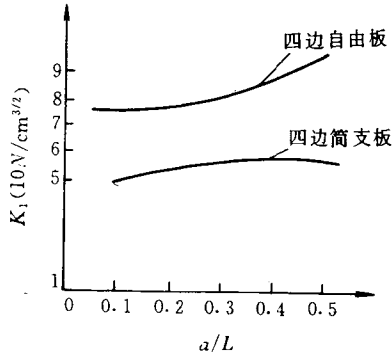


图 9.10 支承条件对应力强度因子的影响

有限尺寸影响系数不断增大。但对简支板而言,当  $a/L$  增大到 0.4 以后,有限尺寸影响系数的曲线趋于平缓。

## 2. 板的长宽比对应力强度因子的影响

前面各项计算均是对方板进行的,现在研究矩形板。对于图 9.1(a) 所示问题,取  $a=1\text{cm}$ ,  $h/a=0.1$ ,  $M=10\text{N}\cdot\text{cm}/\text{cm}$ ,  $\nu=0.3$ ,  $2L=20\text{cm}$ ,  $2W$  则分别取  $20\text{cm}$ ,  $10\text{cm}$ ,  $5\text{cm}$  和  $4\text{cm}$ , 计算结果列于表 9.10 中。可以看出,当板的长度不变而宽度变小时,应力强度因子增大。此外,还可以看出,矩形板的应力强度因子总是介于与其同宽的方板和无限大板的应力强度因子之间,在表 9.10 所计算的范围内,若以与矩形板的宽度相同的方板代替此矩形板,误差在 5% 之内。

表 9.10 不同边长比对应力强度因子的影响

板的形状	应力强度因子 $K_1/10\text{N}\cdot\text{cm}^{-3/2}$			
	$2W=20\text{cm}$	$2W=10\text{cm}$	$2W=5\text{cm}$	$2W=4\text{cm}$
矩形	484.0218	496.9064	500.1570	525.008
方形	484.0218	497.3406	516.7353	549.7369
百分相差(%)	0	0.1	3.3	4.5

注:计算对象见图 9.1(a),取  $a=1\text{cm}$ ,  $h/a=0.1$ ,  $M=10\text{N}\cdot\text{cm}/\text{cm}$ ,  $\nu=0.3$ . 对于矩形板均取  $2L=20\text{cm}$ , 对于方板,则取  $2L=2W$ 。

## § 9.4 Reissner 型板理论与 Kirchhoff 板理论所得 应力强度因子的比较

对于远处受均匀弯矩的无限板,式(9.1)和式(9.2)中的函数  $\Phi(1)$  就是 Reissner 型板与 Kirchhoff 板两种理论所求得的 I 型应力强度因子之比值。函数  $\Phi(1)$  已由图 9.2 给出。

对于远处受均匀扭矩的无限板,式(9.3)所定义的 II 型无量纲应力强度因子  $\tilde{K}_2$  就是 Reissner 型板与 Kirchhoff 板两种理论所求得的 II 型应力强度因子之比值。表 9.2 和图 9.3 分别给出了  $\tilde{K}_2$  作为  $a/h$  的函数的数据和曲线。由于 Kirchhoff 板在断裂分析中的理论缺陷,它不可能用于计算板的 III 型应力强度因子。不过从对 Reissner 型板的分析计算可以看到,III 型应力强度因子通常比 II 型应力强度因子小一个量级。

对于有限尺寸板,分别由式(9.5)和(9.3)所定义无量纲应力强度因子可以看作 Reissner 型有限尺寸板与 Kirchhoff 无限大板的应力强度因子之比值。

## § 9.5 计算 Reissner 型板应力强度因子的一组 近似方程与近似解法

在 Reissner 型板裂纹尖端场基础上建立的局部-整体法,已经为含裂纹板的分析提供了一个精确有效的方法。然而从应用的角度,这个方法仍具有一定的复杂性。对于许多工程问题,还有必要寻找计算量小、精度高的方法来解决含裂纹板问题。下面提出一组近似方程和近似解法<sup>[46]</sup>。

### 1. Reissner 型板理论的近似方程

从第五章和第七章已经看到,Reissner 型板的三个广义位移可以由两个函数  $F$  和  $f$  表达。在极坐标下

$$\psi_r = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \psi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial r} \quad (9.6)$$

$$\omega = F - \frac{D}{C} \nabla^2 F + \text{Im}\Phi \quad (9.7)$$

平衡方程可表示为

$$D \nabla^4 F = q \quad (9.8)$$

$$\nabla^2 f - 4k^2 f = 4k^2 \text{Re}\Phi \quad (9.9)$$

其中  $\Phi(z)$  是一个解析函数。计算表明, 函数  $f$  通常比函数  $F$  和  $\omega$  小一个量级<sup>[30]</sup>。这启发我们在实际计算中可以考虑略去与  $f$  有关的项。此外, 在式(9.7)中,  $\text{Im}\Phi(z)$  是一个调和函数, 可以被双调和函数  $F$  所包含, 而包含  $\text{Re}\Phi(z)$  的方程(9.9)又可以忽略, 因此在求解 I、II 型应力强度因子时, 近似取  $f=0, \Phi(z)=0$ , 将方程简化为

$$\psi_r = \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \psi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (9.10)$$

$$\omega = F - \frac{D}{C} \nabla^2 F \quad (9.11)$$

$$D \nabla^4 F = q \quad (9.12)$$

这组方程与 Kirchhoff 板的方程相似,  $F$  相当于 Kirchhoff 板的挠度  $w$ , 从而边界条件的提法也相同, 在自由边界, 应提等效剪力的边界条件:

$$\frac{\partial M_n}{\partial s} + Q_n = \bar{V}_n \quad (9.13)$$

其中  $\bar{V}_n$  是边界指定剪力。与 Kirchhoff 板理论不同, 这组近似方程考虑了板的剪切变形。在剪切刚度  $C$  趋于无穷大时, 这组方程退化为 Kirchhoff 板的方程。

## 2. 裂纹尖端场的近似展开式

取方程(9.12)的右端项为零, 在图 2.7 所示裂纹尖端极坐标下, 函数  $F$  的通解为

$$F(r, \theta) = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} [A_1^{(\lambda)} \cos(\lambda-1)\theta + A_2^{(\lambda)} \sin(\lambda-1)\theta +$$

$$A_3^{(\lambda)} \cos(\lambda + 1)\theta + A_4^{(\lambda)} \sin(\lambda + 1)\theta] \quad (9.14)$$

对于对称问题,函数  $F$  为

$$F(r, \theta) = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} [A_1^{(\lambda)} \cos(\lambda - 1)\theta + A_3^{(\lambda)} \cos(\lambda + 1)\theta] \quad (9.15)$$

于是

$$\nabla^2 F = \sum_{\lambda} 4\lambda r^{\lambda-1} A_1^{(\lambda)} \cos(\lambda - 1)\theta \quad (9.16)$$

将函数  $F$  的展开式(9.15)代入式(9.10)和(9.11),得到三个广义位移在裂纹尖端的近似展开式

$$w = \sum_{\lambda} \left[ (r^{\lambda+1} - \frac{D}{C} 4\lambda r^{\lambda-1}) A_1^{(\lambda)} \cos(\lambda - 1)\theta + r^{\lambda+1} A_3^{(\lambda)} \cos(\lambda + 1)\theta \right] \quad (9.17)$$

$$\psi_r = \sum_{\lambda} (\lambda + 1) r^{\lambda} [A_1^{(\lambda)} \cos(\lambda - 1)\theta + A_3^{(\lambda)} \cos(\lambda + 1)\theta] \quad (9.18)$$

$$\psi_{\theta} = - \sum_{\lambda} r^{\lambda} [(\lambda - 1) A_1^{(\lambda)} \sin(\lambda - 1)\theta + (\lambda + 1) A_3^{(\lambda)} \sin(\lambda + 1)\theta] \quad (9.19)$$

在板的内力表达式(7.10)与(7.11)中令  $f=0, f_0=0$ ,并将式(9.15)和(9.16)代入,得到内力在裂纹尖端的近似展开式

$$M_r = -D \sum_{\lambda} [4\nu + (1 - \nu)(\lambda + 1)] \lambda r^{\lambda-1} \cos(\lambda - 1)\theta \cdot A_1^{(\lambda)} - D \sum_{\lambda} [(1 - \nu)\lambda(\lambda + 1) r^{\lambda-1} \cos(\lambda + 1)\theta] A_3^{(\lambda)} \quad (9.20)$$

$$M_{\theta} = -D \sum_{\lambda} [4 - (1 - \nu)(\lambda + 1)] \lambda r^{\lambda-1} \cos(\lambda - 1)\theta \cdot A_1^{(\lambda)} + D \sum_{\lambda} [(1 - \nu)\lambda(\lambda + 1) r^{\lambda-1} \cos(\lambda + 1)\theta] A_3^{(\lambda)} \quad (9.21)$$

$$M_{r\theta} = D(1 - \nu) \sum_{\lambda} \lambda(\lambda - 1) r^{\lambda-1} \sin(\lambda - 1)\theta \cdot A_1^{(\lambda)} +$$

$$D(1 - \nu) \sum_{\lambda} \lambda(\lambda + 1)r^{\lambda-1} \sin(\lambda + 1)\theta \cdot A_3^{(\lambda)} \quad (9.22)$$

$$Q_r = -4D \sum_{\lambda} \lambda(\lambda - 1)r^{\lambda-2} \cos(\lambda - 1)\theta \cdot A_1^{(\lambda)} \quad (9.23)$$

$$Q_{\theta} = 4D \sum_{\lambda} \lambda(\lambda - 1)r^{\lambda-2} \sin(\lambda - 1)\theta \cdot A_1^{(\lambda)} \quad (9.24)$$

参考第七章中的特征展开法,可知式(9.14)~(9.24)中的  $\lambda$  取半整数与整数。由式(9.20)~(9.22)中的弯矩和扭矩在裂纹尖端的奇异性为  $r^{-1/2}$  的条件,可以知道  $\lambda$  必须取正数

$$\lambda = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (9.25)$$

又由式(9.23)和(9.24)中剪力在裂纹尖端奇异性为  $r^{-1/2}$  的条件,可以知道

$$A_1^{(\frac{1}{2})} = 0 \quad (9.26)$$

于是可以将 Reissner 型板裂纹尖端场近似展开式中的待定系数组成未知参数列阵

$$\begin{aligned} \{\delta\} = [ & A_1^{(1)}, A_1^{(3/2)}, A_1^{(2)}, \dots, A_1^{(n+1/2)}, \\ & A_3^{(1/2)}, A_3^{(1)}, A_3^{(3/2)}, \dots, A_3^{(n)} ]^T \end{aligned} \quad (9.27)$$

### 3. 能量解法

计算对象如图 9.11 所示,其中图 9.11(a)为含长  $2a$  的中心裂纹的方板,边界受均匀弯矩  $M$ ;图 9.11(b)为含长  $a$  的边裂纹的矩形板,两对边受均匀弯矩  $M$ 。

式(9.20)~(9.24)逐项满足平衡方程,应用格林公式可以导出如下板的势能表达式

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_s (Q_n w - M_n \psi_n - M_{ns} \psi_s) ds - \\ \int_s (\bar{Q}_n w - \bar{M}_n \psi_n - \bar{M}_{ns} \psi_s) ds \end{aligned} \quad (9.28)$$

其中  $s$  为板的边界,  $\bar{Q}_n$ 、 $\bar{M}_n$  和  $\bar{M}_{ns}$  分别为边界上指定剪力、弯矩和扭矩。由于势能表达式化为了线积分,在计算中可以提高精度并减少计算工作量。

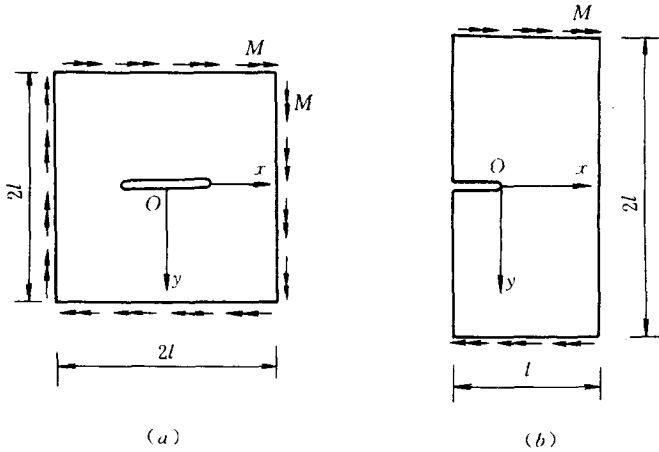


图 9.11 含中心裂纹与边裂纹平板

将表达式(9.15)~(9.24)代入式(9.28)得到

$$\Pi = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\} - \{\delta\}^T \{P\} \quad (9.29)$$

式中 $[K]$ 为刚度矩阵、 $\{P\}$ 为载荷列阵、 $\{\delta\}$ 为广义位移列向量。对 $\{\delta\}$ 的变分得到关于 $\{\delta\}$ 的矩阵方程

$$[K] \{\delta\} = \{P\} \quad (9.30)$$

如果裂纹面不受外载,则其边界条件可以写为

$$M_\theta = 0, \quad \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + Q_\theta = 0 \quad (9.31)$$

裂纹尖端场的近似展开式(9.15)~(9.24)逐项满足平衡方程,但是没有逐项满足裂纹面边界条件(9.31),它只能作为自然边界条件通过变分近似满足。为了提高精度,将式(9.21)、(9.22)和(9.24)代入边界条件(9.31),并在裂纹面配置若干个点,形成一组未知系数的线代数方程

$$[A] \{\delta\} = \{0\} \quad (9.32)$$

将方程(9.30)与(9.32)联立得到

$$\begin{bmatrix} [K] \\ [A] \end{bmatrix} \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \{P\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (9.33)$$

显然,方程(9.33)中线代数方程数目多于未知参数个数,不能按常

规方法求解。为此采用最小二乘技巧。在方程(9.33)两边同时左乘 $[[K]^T [A]^T]$ 得到

$$[[K]^T [A]^T] \begin{bmatrix} [K] \\ [A] \end{bmatrix} \{\delta\} = [[K]^T [A]^T] \begin{Bmatrix} \{P\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (9.34)$$

方程(9.34)可以采用各种常规的线代数方程组的解法和程序求解。

#### 4. 算例

例1 图9.11(a)所示中心裂纹板,取均布弯矩  $M=1\text{kN} \cdot \text{cm}/\text{cm}$ ,泊松比  $\nu=0.3$ ,裂纹长  $2a=2\text{cm}$ 。

利用问题的对称性,取四分之一板进行计算。由于在对称线  $x=0$  上的对称条件  $\psi_x=0$  不能被式(9.18)和(9.19)自动满足,将此对称线上分布弯矩  $M_0$  对角位称  $\psi_x$  所作的功计入总势能中。根据静力平衡条件,  $M_0$  在此对称线上的合弯矩等于  $Ml$ 。在满足此静力平衡条件的前提下,假设  $M_0$  沿此对称线的分布规律为

$$M_0 = M \left[ \left( \frac{l-y}{l} \right)^m + \frac{m}{m+1} \right] \quad (9.35)$$

从实际计算可以看出,应力强度因子对  $m$  的取值不敏感。下面的计算中取  $m=6$ 。

表9.11列出了  $a/l=0.1$  时,由近似法计算的应力强度因子之值,并与局部-整体法和解析法的结果作了对照。表9.12则显示了应力强度因子随板长变化的情况,可以看出,近似解法的精度是很高的。

表9.11 应力强度因子  $K_I/(\text{kN}/\text{cm}^{3/2})$  结果对照

$h/a$	近似法	局部-整体法1	局部-整体法2	解析法 <sup>[24]</sup>
0.5	29.28	28.61	28.75	29.48
1	7.44	7.82	7.81	7.91

注:计算对象见图9.11(a),取  $M=1\text{kN} \cdot \text{cm}/\text{cm}$ ,  $\nu=0.3$ ,  $a=1\text{cm}$ ,  $a/l=0.1$ ;局部-整体法1<sup>[42]</sup>指裂纹尖端高阶矩形奇异元与矩形板元结合的方法,局部-整体法2<sup>[19]</sup>指圆形奇异元与常内力三角形元结合的方法。



表 9.12 应力强度因子  $K_1/(kN/cm^{3/2})$  随边长变化

$\frac{a}{l}$	$h/a=0.5$		$h/a=1$	
	近似法	局部-整体法	近似法	局部-整体法
0.1	29.28	28.61	7.44	7.82
0.2	30.17	29.36	7.66	8.06
0.3	31.19		7.93	
0.4	32.47	31.92		

注:计算对象见图 9.11(a),  $M=1kN \cdot cm/cm$ ,  $\nu=0.3$ ,  $a=1cm$ 。

例 2 图 9.11(b) 所示边裂纹板, 均布弯矩  $M=1kN \cdot cm/cm$ , 泊松比  $\nu=0.3$ , 边裂纹长  $a=1cm$  (表 9.14 例外)。

利用对称性, 取二分之一板进行计算。取  $l=10cm$ , 考察忽略函数  $f$  对应力强度因子的影响。函数  $F$  和  $f$  的展开式项数  $n$  分别取 8, 9, 10。应力强度因子的结果列于表 9.13 中。可以看出, 忽略函数  $f$  对结果的影响很小。

表 9.13 函数  $f$  对应力强度因子  $K_1/(kN/cm^{3/2})$  的影响

$n$	$h/a=0.7$		$h/a=1$	
	保留 $f$	忽略 $f$	保留 $f$	忽略 $f$
8	16.482	16.406	8.153	8.139
9	16.135	16.118	8.045	8.065
10	16.101	15.993	8.017	8.030

表 9.14 是为了考察函数  $F$  的项数增加时 (函数  $f$  已忽略), 解的收敛性。数值结果表明, 解的收敛是迅速而稳定的。一般取项数  $n=9$  时, 就有很好的结果。

表 9.15 显示了应力强度因子随板的边长的变化情况, 表 9.16 则显示了应力强度因子随板厚的变化情况。

表 9.14 应力强度因子  $K_1/(kN/cm^{3/2})$  的收敛性

$n$	情形 1 <sup>①</sup>	情形 2 <sup>②</sup>	$n$	情形 1	情形 2
1	16.268	10.390	6	9.048	9.967
2	13.491	11.654	7	8.471	9.941
3	11.923	10.683	8	8.139	9.872
4	10.640	10.528	9	8.065	9.845
5	9.322	10.254	10	8.030	9.789

①取  $a=1cm, h=1cm, l=10cm$ 。  
②取  $a=1.5cm, h=1cm, l=5cm$ 。

表 9.15 应力强度因子  $K_1/(kN/cm^{3/2})$  随边长变化

$h/a$	$a/l=0.1$	$a/l=0.2$	$a/l=0.3$	$a/l=0.4$
0.5	31.17	31.40	31.77	32.84
1	8.07	8.08	8.19	8.40

表 9.16 应力强度因子  $K_1/(kN/cm^{3/2})$  随板厚变化

$a/l$	$h/a=0.5$	$h/a=1$	$h/a=1.5$	$h/a=2$	$h/a=2.5$
0.5	33.49	8.45	3.88	2.19	1.40
0.1	31.17	8.07	3.67	2.10	1.36

## § 9.6 关于数值计算的几点讨论

① 根据 Reissner 型板裂纹尖端场展开式构造的高阶奇异元与常规元相结合的局部-整体法,与同类数值方法相比,计算精度和效率有较大提高,是一种对含裂纹板分析有普遍适用意义而又精确有效的方法。

采用 Reissner 型板裂纹尖端场展开式或将它们再作一定简化,还可以发展其它的有特点的近似方法。

② 奇异元与常规元的连接是通过诸如满足连接边界上多点约束条件来实现的,并没有保证全部连接边界的位移协调条件,解

的收敛性尚没有严格的数学证明。但是数值计算显示了解的收敛性和数值稳定性,将不同形状的奇异元与不同形状的低阶和高精度常规元结合进行数值分析都说明了这一点。

③ 对于对称 I 型问题,奇异元位移模式取至  $O(r^{5/2})$  阶时可以获得良好的结果。对于复合型问题,位移模式阶数要取得更高一些,例如  $O(r^{7/2})$  阶或以上。奇异元的最佳尺寸与位移模式阶数的选取有密切关系。在本章计算的各例中,对于对称情形,奇异元尺寸取  $0.1 \sim 0.4[a, h]_{\min}$ , 对于反对称情形,奇异元尺寸取  $0.04 \sim 0.06[a, h]_{\min}$ , 其中  $[a, h]_{\min}$  表示裂纹半长  $a$  与厚度  $h$  中的较小者。

## 第十章 含裂纹 Reissner 型球壳的断裂分析

### § 10.1 壳体断裂问题概述

由两个几何曲面所限定的片状结构称为壳体。壳体一般有三个特征几何尺寸：厚度  $h$ ，中面的平面尺寸  $l$ ，曲率半径  $\rho$ 。根据这三个尺寸的不同比例，壳体分为许多类型。壳体理论讨论的壳体都要求

$$h \ll \rho \quad (10.1)$$

此外，如果

$$h \ll l \quad (10.2)$$

则称这类壳体为薄壳；如果

$$l \ll \rho \quad (10.3)$$

则称这类壳体为扁壳。

对含裂纹壳体进行断裂分析的关键是壳体裂纹尖端场研究。这时所涉及的裂纹尖端附近的局部区域总能满足条件(10.3)，因此对壳体裂纹尖端场的研究将采用扁壳理论。

与对含裂纹平板的研究一样，对含裂纹壳体的研究主要采用两种扁壳理论，即以 Kirchhoff 假设为基础的经典壳体理论和考虑横向剪切变形的 Reissner 型壳体理论。

早期的壳体断裂分析普遍采用 Kirchhoff 经典壳体理论，研究范围涉及球壳、圆柱壳、各种旋转壳等工程中常见的几何形状的壳体<sup>[89~96]</sup>。

由于曲率的存在，壳体内拉伸应力与弯曲应力耦合，裂纹面应该有五个自然边界条件，即关于弯矩  $M_y$ ，扭矩  $M_{xy}$ ，横向剪力  $Q_y$ ，面内拉力  $N_y$  和面内剪力  $N_{xy}$ （设裂纹面沿  $x$  轴）的边界条件。另一

方面,经典扁壳理论对壳体的变形作了如下假设:变形前垂直于中面的直线在变形后仍垂直于中面,且其长度保持不变。这个假设忽略了横向剪切变形,导致一个 8 阶的微分方程,只要求 4 个边界条件。按照 Kirchhoff 理论,引入等效剪力的概念,可以将 5 个自然边界条件归并为 4 个。除了自由边邻近的很小区域外,Kirchhoff 经典壳体理论对薄壳的分析是实用有效的,并得到了广泛的应用。但是由于裂纹尖端是两个自由边界的特殊角点,像 Kirchhoff 平板断裂理论一样,Kirchhoff 壳体断裂理论将导致主要弯曲应力与面内应力在裂纹尖端邻近的角分布函数不同,也导致横向剪力不是独立的广义力,在裂纹尖端具有  $r^{-3/2}$  阶的不合理的奇异性。Kirchhoff 壳体弯曲断裂理论同样有严重的理论缺陷。

Reissner 型壳体理论考虑了横向剪切变形作用<sup>[97]</sup>,导出的基本方程为 10 阶的偏微分方程,裂纹面的 5 个自然边界条件全部能得到满足。采用 Reissner 型壳体理论,Sih<sup>[98]</sup>和 Delale<sup>[99]</sup>分别用积分变换的方法研究了无限大含裂纹球壳受对称载荷(包括拉伸和弯曲)的问题,Delale<sup>[100]</sup>还研究了无限大含裂纹扁壳(包括球壳、柱壳、环状壳等)受反对称载荷作用的问题。Reissner 型壳体断裂理论克服了 Kirchhoff 经典壳体断裂理论的缺陷。然而由于 Reissner 型壳体断裂分析的复杂性,上述研究离问题的彻底解决还很远。其一,这些研究仅给出了裂纹尖端场的首项表达式,整个场的力学结构特性尚不清楚。其二,这些研究仅针对含裂纹无限大扁壳,对于实际工程中的含裂纹有限尺寸壳体(包括扁壳与陡壳),适用范围有限。

柳春图和他的学生们继对含裂纹 Reissner 型平板的断裂理论研究之后,对含裂纹 Reissner 型壳体断裂问题进行了较深入的研究,获得了工程常用壳体裂纹尖端场在 Reissner 型壳体理论下的一般级数解,揭示了其裂纹尖端场力学性质;同时利用所得到的裂纹尖端场展开式,发展了含裂纹 Reissner 型壳体的局部-整体法,为含裂纹壳体的断裂分析提供了一个有普遍适用意义并且是有效实用的工具。

本章将研究含裂纹 Reissner 型球壳的断裂问题。

## § 10.2 Reissner 型球壳的基本方程

### 1. 基本方程

如图 10.1 所示,球壳(一球冠)的中面半径为  $R$ ,厚度为  $h$ ,底面半径为  $L$ ,且设  $L/R \ll 1$ 。壳体内含一条长  $2a$  的裂纹。如上节

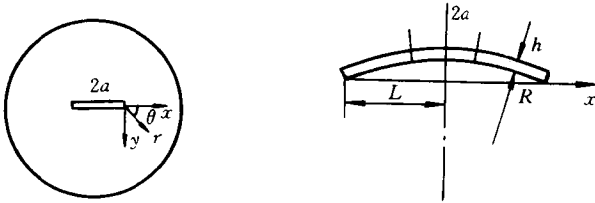


图 10.1 含穿透裂纹的球壳

所述,研究裂纹尖端邻域力学性质所取的局部区域总能满足扁壳的几何条件(10.3)。仿照对于 Reissner 型板的研究方式,得到 Reissner 型扁球壳的广义应力应变关系为

$$\begin{cases} M_x = -D \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\ M_y = -D \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \\ M_{xy} = -\frac{1-\nu}{2} D \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (10.4)$$

$$\begin{cases} Q_x = C \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) \\ Q_y = C \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) \end{cases} \quad (10.5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{B} (N_x - \nu N_y) + \kappa w \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{B} (N_y - \nu N_x) + \kappa w \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{B} N_{xy} \end{cases} \quad (10.6)$$

其中  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x$  和  $Q_y$  分别是壳体的弯矩、扭矩和横向剪力;  $N_x, N_y$  和  $N_{xy}$  分别是面内拉(压)力和剪力, 或称为薄膜力(这些内力如图 10.2 所示, 为了清楚起见, 它们被画在 (a)、(b) 两个图上);  $u, v, w$  分别是中面的面内和横向位移;  $\psi_x$  和  $\psi_y$  是变形前的中面法线在变形后分别在  $Oxy$  与  $Oyz$  平面内的转角。  $B = Eh$  是壳体的拉压刚度。  $D$  和  $C$  分别是由式 (5.11) 和 (5.26) 所表示的弯曲刚度与剪切刚度。  $E$  为杨氏模量,  $\nu$  为泊松比,  $\kappa = 1/R$  为壳的中面曲率。

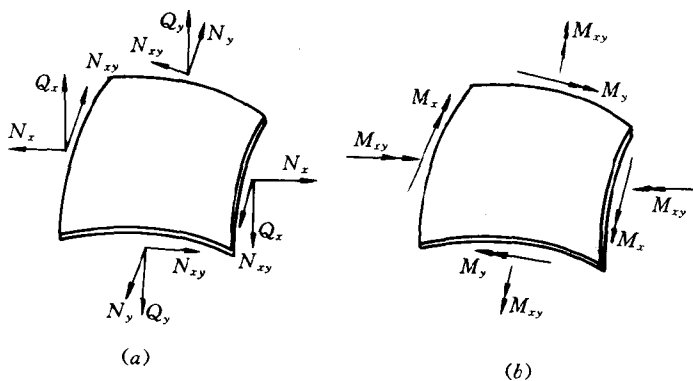


图 10.2 壳体的内力

用内力表示的球壳的平衡方程为

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (10.7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 & \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \kappa(N_x + N_y) + q = 0 \end{cases} \quad (10.8)$$

其中  $q$  是球壳外表面的压力载荷。

设裂纹面不受外载, 边界条件可以写为

$$\begin{cases} M_y = 0, M_{xy} = 0, Q_y = 0 \\ N_y = 0, N_{xy} = 0 \end{cases} \quad (10.9)$$

引进应力函数  $\varphi$ , 并设

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (10.10)$$

显然,采用应力函数(10.10),平衡方程(10.7)已经自动满足。将式(10.4)、(10.5)和(10.10)代入方程(10.8),得到以广义位移  $\psi_x, \psi_y, w$  和应力函数  $\varphi$  表示的扁球壳的平衡方程

$$D\left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y}\right) + C\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x\right) = 0 \quad (10.11)$$

$$D\left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y}\right) + C\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y\right) = 0 \quad (10.12)$$

$$C\left(\nabla^2 w - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right) + \kappa \nabla^2 \varphi + q = 0 \quad (10.13)$$

将式(10.10)代入式(10.6),可以导出球壳的相容方程

$$\frac{1}{B} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \kappa \nabla^2 w = 0 \quad (10.14)$$

## 2. 基本方程的简化

为了将基本方程进一步简化,按下式引进位移函数  $F$  和  $f$

$$\psi_x = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \psi_y = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \quad (10.15)$$

将式(10.15)代入平衡方程(10.11)和(10.12),得到

$$\frac{\partial}{\partial x} [D \nabla^2 F + C(w - F)] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{D}{2} (1 - \nu) \nabla^2 f - Cf \right] = 0 \quad (10.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [D \nabla^2 F + C(w - F)] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{D}{2} (1 - \nu) \nabla^2 f - Cf \right] = 0 \quad (10.17)$$

可以看到,上两方程方括号里的函数满足 Cauchy-Riemann 条件,可以用一个解析函数  $C\Phi(x+iy)$  的实部和虚部表示,其中添加剪切刚度  $C$  作乘子是为了使后面的公式简洁。

$$\left[ \frac{D}{2} (1 - \nu) \nabla^2 f - Cf \right] + i [D \nabla^2 F + C(w - F)] =$$



$$C\Phi(x + iy) \quad (10.18)$$

分离上式的实部和虚部,得到

$$\frac{D}{2}(1 - \nu)\nabla^2 f - Cf = C\operatorname{Re}\Phi \quad (10.19)$$

$$D\nabla^2 F + C(w - F) = C\operatorname{Im}\Phi \quad (10.20)$$

从方程(10.20)可以求得  $w$

$$w = F - \frac{D}{C}\nabla^2 F - \operatorname{Im}\Phi \quad (10.21)$$

将式(10.15)和(10.21)代入平衡方程(10.13),得到

$$D\nabla^2\nabla^2 F - \kappa\nabla^2\varphi = q \quad (10.22)$$

将式(10.21)代入相容方程(10.14),得到

$$\frac{1}{B}\nabla^2\nabla^2\varphi + \kappa\nabla^2 F - \kappa\frac{D}{C}\nabla^2\nabla^2 F = 0 \quad (10.23)$$

设  $q=0$ ,由方程(10.22)和(10.23)可以导出

$$\nabla^6 F - \frac{\kappa^2 B}{C}\nabla^4 F + \frac{\kappa^2 B}{D}\nabla^2 F = 0 \quad (10.24)$$

能够证明,方程(10.24)中的函数  $F$  能够表示为三个函数  $F_0$ ,  $F_1$  和  $F_2$  之和

$$F = F_0 + F_1 + F_2 \quad (10.25)$$

这三个函数分别满足下述方程

$$\nabla^2 F_0 = 0 \quad (10.26)$$

$$\nabla^2 F_1 - 4s_1^2 F_1 = 0 \quad (10.27)$$

$$\nabla^2 F_2 - 4s_2^2 F_2 = 0 \quad (10.28)$$

其中

$$\frac{4s_1^2}{4s_2^2} = \frac{\kappa^2 B}{2C} \pm \sqrt{\frac{\kappa^4 B^2}{4C^2} - \frac{\kappa^2 B}{D}} \quad (10.29)$$

方程(10.19)的解可以写为它的对应齐次方程的通解  $f_0$  和它的一个特解之和,显然  $-\operatorname{Re}\Phi$  是它的一个特解,于是有

$$\nabla^2 f_0 - 4k^2 f_0 = 0 \quad (10.30)$$

$$f = f_0 - \operatorname{Re}\Phi \quad (10.31)$$

其中

$$4k^2 = \frac{2C}{(1-\nu)D} = \frac{10}{h^2} \quad (10.32)$$

通过上面的简化,Reissner 型球壳的 10 阶微分方程就化为了全部由标量函数表示的两阶微分方程组。为了推导球壳裂纹尖端位移应力场展开式,下面将基本公式和基本方程变换到极坐标系中。

### 3. 极坐标系下的基本公式和方程

如图 10.1 建立在裂纹尖端局部区域的极坐标系。简化后的基本方程很容易变换为极坐标的形式。事实上,只要将方程中的 Laplace 算子  $\nabla^2$  写成由式(2.44)所表示的极坐标形式就行了。

其它有关公式的极坐标形式如下

$$\begin{cases} \psi_r = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \psi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial r} \end{cases} \quad (10.33)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{B} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) + \kappa w \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{1}{B} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \right] + \kappa w \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = - \frac{2(1+\nu)}{B} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (10.34)$$

$$\begin{cases} -\frac{M_r}{D} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ -\frac{M_\theta}{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ -\frac{M_{r,\theta}}{(1-\nu)D} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + 2k^2 f_0 - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \end{cases} \quad (10.35)$$

$$\begin{cases} N_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \\ N_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ N_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (10.36)$$

$$\begin{cases} -\frac{Q_r}{C} = \frac{D}{C} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 F + \frac{1}{r} \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \\ -\frac{Q_\theta}{C} = \frac{D}{C} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 F - \frac{\partial f_0}{\partial r} \end{cases} \quad (10.37)$$

在极坐标下, 裂纹面的边界条件(10.9)能够进一步表示为

$$\begin{cases} \nabla^2 F - (1-\nu) \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + (2kf_0 - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}) = 0 \\ \frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{D}{C} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 F = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \end{cases} \quad \theta = \pm \pi \quad (10.38)$$

### § 10.3 Reissner 型球壳裂纹尖端场 与应力强度因子

#### 1. 裂纹尖端场

在裂纹尖端附近, 将解析函数  $\Phi(x+iy)$  进行特征展开

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{\lambda} (\beta_{\lambda-1} + i\alpha_{\lambda-1}) z^{\lambda-1} = \sum_{\lambda} (\beta_{\lambda-1} + i\alpha_{\lambda-1}) r^{\lambda-1} \cdot \\ &\quad [\cos(\lambda-1)\theta + i\sin(\lambda-1)\theta] \end{aligned} \quad (10.39)$$

于是由式(10.21)和(10.31),函数  $f$  和  $w$  能够表示为

$$f = f_0 + \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} [\alpha_{\lambda-1} \sin(\lambda-1)\theta - \beta_{\lambda-1} \cos(\lambda-1)\theta] \quad (10.40)$$

$$w = F - \frac{D}{C} \nabla^2 F + \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} [\alpha_{\lambda-1} \cos(\lambda-1)\theta + \beta_{\lambda-1} \sin(\lambda-1)\theta] \quad (10.41)$$

由式(10.25),函数  $F$  为三个函数  $F_0, F_1$  与  $F_2$  之和。 $F_0$  为调和函数,  $F_1, F_2$  及  $f_0$  必须分别满足 Helmholtz 方程(10.27)、(10.28)和(10.30),它们的解能够用修正的 Bessel 函数表达。从应变能有限的条件,必须删去第二类修正的 Bessel 函数,仅保留第一类修正的 Bessel 函数,并且特征值  $\lambda$  取正数。再利用裂纹面的边界条件(10.38),最后可以求得函数  $f, F, w$  和  $\varphi$  在裂纹尖端特征展开式的通项公式<sup>[43,101]</sup>。为了避免记号上的混淆,在下述展开式中,由式(10.10)所引入的应力函数  $\varphi$  将由  $\bar{\varphi}$  代替。

(1) 当  $\lambda$  为半整数,即  $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

$$\begin{aligned} f = & \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} [-(A_{\lambda-1}^{(1)} + A_{\lambda-1}^{(2)}) \sin(\lambda-1)\theta + (B_{\lambda-1}^{(1)} + B_{\lambda-1}^{(2)}) \cdot \\ & \cos(\lambda-1)\theta] + \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} [-\frac{4D}{C} (s_1^2 A_{\lambda-1}^{(1)} + s_2^2 A_{\lambda-1}^{(2)}) \cdot \\ & \sin(\lambda-1+2n)\theta + \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} (D_{\lambda-1}^{(2)} + \frac{4D}{C} s_1^2 B_{\lambda-1}^{(1)} + \\ & \frac{4D}{C} s_2^2 B_{\lambda-1}^{(2)}) \cos(\lambda-1+2n)\theta] \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \cdot \\ & \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \end{aligned} \quad (10.42)$$

$$\begin{aligned} F = & \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} [(A_{\lambda-1}^{(1)} + A_{\lambda-1}^{(2)}) \cos(\lambda-1)\theta + (B_{\lambda-1}^{(1)} + B_{\lambda-1}^{(2)}) \cdot \\ & \sin(\lambda-1)\theta] + \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \frac{4}{\lambda(\lambda+1)(1-\nu)} [- (s_1^2 A_{\lambda-1}^{(1)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s_2^2 A_{\lambda-1}^{(2)} \cos(\lambda+1)\theta + (s_1^2 B_{\lambda-1}^{(1)} + s_2^2 B_{\lambda-1}^{(2)}) \sin(\lambda+1)\theta] + \\
& \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} A_{\lambda-1}^{(1)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + \right. \\
& \left. B_{\lambda-1}^{(1)} \sin(\lambda-1+2n)\theta \right] \cdot \\
& \frac{(-s_1^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{s_1^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} + \\
& \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} A_{\lambda-1}^{(2)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + \right. \\
& \left. B_{\lambda-1}^{(2)} \sin(\lambda-1+2n)\theta \right] \cdot \frac{(-s_2^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \cdot \\
& \sum_{m=0,1,\dots} \frac{s_2^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \tag{10.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega = & \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} D_{\lambda-1} \sin(\lambda-1)\theta + \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \frac{4}{\lambda(\lambda+1)(1-\nu)} \cdot \\
& [- (s_1^2 A_{\lambda-1}^{(1)} + s_2^2 A_{\lambda-1}^{(2)}) \cos(\lambda+1)\theta + \\
& (s_1^2 B_{\lambda-1}^{(1)} + s_2^2 B_{\lambda-1}^{(2)}) \sin(\lambda+1)\theta] + \\
& (1 - \frac{4D}{C} s_1^2) \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} A_{\lambda-1}^{(1)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + \right. \\
& \left. B_{\lambda-1}^{(1)} \sin(\lambda-1+2n)\theta \right] \frac{(-s_1^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \cdot \\
& \sum_{m=0,1,\dots} \frac{s_1^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} + (1 - \frac{4D}{C} s_2^2) \cdot \\
& \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} A_{\lambda-1}^{(2)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + \right. \\
& \left. B_{\lambda-1}^{(2)} \sin(\lambda-1+2n)\theta \right] \frac{(-s_2^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \cdot \\
& \sum_{m=0,1,\dots} \frac{s_2^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \tag{10.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi} = & \frac{4D}{\kappa} s_1^2 \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} A_{\lambda-1}^{(1)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + \right. \\
& \left. B_{\lambda-1}^{(1)} \sin(\lambda-1+2n)\theta \right] \frac{(-s_1^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0,1,\dots} \frac{s_1^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} + \\
& \frac{4D}{\kappa} s_2^2 \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} A_{\lambda-1}^{(2)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + \right. \\
& \left. B_{\lambda-1}^{(2)} \sin(\lambda-1+2n)\theta \right] \frac{(-s_2^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \cdot \\
& \sum_{m=0,1,\dots} \frac{s_2^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \quad (10.45)
\end{aligned}$$

对于式(10.42)~(10.45), 当  $\lambda-1 \leq \frac{1}{2}$  时,  $D_{\lambda-1}^{(2)} = 0$ ; 当  $\lambda-1 \leq \frac{3}{2}$  时,  $A_{\lambda-1}^{(1)} + A_{\lambda-1}^{(2)} = 0$ ,  $B_{\lambda-1}^{(1)} + B_{\lambda-1}^{(2)} = 0$ .

(2) 当  $\lambda$  为整数, 即  $\lambda = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} \left[ - (A_{\lambda-1}^{(1)} + A_{\lambda-1}^{(2)}) \sin(\lambda-1)\theta + (B_{\lambda-1}^{(1)} + B_{\lambda-1}^{(2)}) \cdot \right. \\
& \left. \cos(\lambda-1)\theta \right] + \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ - \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} (D_{\lambda-1}^{(1)} + \right. \\
& \left. \frac{4D}{C} s_1^2 A_{\lambda-1}^{(1)} + \frac{4D}{C} s_2^2 A_{\lambda-1}^{(2)}) \sin(\lambda-1+2n)\theta + \right. \\
& \left. \frac{4D}{C} (s_1^2 B_{\lambda-1}^{(1)} + s_2^2 B_{\lambda-1}^{(2)}) \cos(\lambda-1+2n)\theta \right] \cdot \\
& \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n-m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \quad (10.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} \left[ (A_{\lambda-1}^{(1)} + A_{\lambda-1}^{(2)}) \cos(\lambda-1)\theta + (B_{\lambda-1}^{(1)} + B_{\lambda-1}^{(2)}) \cdot \right. \\
& \left. \sin(\lambda-1)\theta \right] + \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \frac{4}{\lambda(\lambda+1)(1-\nu)} \left[ (s_1^2 A_{\lambda-1}^{(1)} + \right. \\
& \left. s_2^2 B_{\lambda-1}^{(2)}) \cos(\lambda+1)\theta - (s_1^2 B_{\lambda-1}^{(1)} + s_2^2 B_{\lambda-1}^{(2)}) \sin(\lambda+1)\theta \right] + \\
& \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ A_{\lambda-1}^{(1)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} B_{\lambda-1}^{(1)} \cdot \right. \\
& \left. \sin(\lambda-1+2n)\theta \right] \frac{(-s_1^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \cdot
\end{aligned}$$

$$\sum_{m=0,1,\dots} \frac{s_1^{2m} r^{\lambda-1+2(n-m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} +$$

$$\sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} [A_{\lambda-1}^{(2)} \cos(\lambda-1+2n)\theta +$$

$$\frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} B_{\lambda-1}^{(2)} \sin(\lambda-1+2n)\theta].$$

$$\frac{(-s_2^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{s_2^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \quad (10.47)$$

$$\omega = \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} D_{\lambda-1}^{(1)} \cos(\lambda-1)\theta + \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \frac{4}{\lambda(\lambda+1)(1-\nu)} \cdot$$

$$[(s_1^2 A_{\lambda-1}^{(1)} + s_2^2 A_{\lambda-1}^{(2)}) \cos(\lambda+1)\theta - (s_1^2 B_{\lambda-1}^{(1)} + s_2^{(2)} B_{\lambda-1}^{(2)}) \cdot$$

$$\sin(\lambda+1)\theta] + (1 - \frac{4D}{C} s_1^2) \cdot$$

$$\sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} [A_{\lambda-1}^{(1)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} B_{\lambda-1}^{(1)} \cdot$$

$$\sin(\lambda-1+2n)\theta] \frac{(-s_1^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \cdot$$

$$\sum_{m=0,1,\dots} \frac{s_1^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} + (1 - \frac{4D}{C} s_2^2) \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \cdot$$

$$[A_{\lambda-1}^{(2)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} B_{\lambda-1}^{(2)} \cdot$$

$$\sin(\lambda-1+2n)\theta] \frac{(-s_2^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \cdot$$

$$\sum_{m=0,1,\dots} \frac{s_2^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \quad (10.48)$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{4D}{\kappa} s_1^2 \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} [A_{\lambda-1}^{(1)} \cos(\lambda-1+2n)\theta +$$

$$\frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} B_{\lambda-1}^{(1)} \sin(\lambda-1+2n)\theta] \frac{(-s_1^2)^n}{n! \varphi(\lambda-n-2, n)} \cdot$$

$$\sum_{m=0,1,\dots} \frac{s_1^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} + \frac{4D}{\kappa} s_1^2 \cdot$$

$$\sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ A_{\lambda-1}^{(2)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} B_{\lambda-1}^{(2)} \cdot \right.$$

$$\left. \sin(\lambda-1+2n)\theta \right] \frac{(-s_2^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \cdot$$

$$\sum_{m=0,1,\dots} \frac{s_2^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \quad (10.49)$$

对于式(10.46)~(10.49),当 $\lambda-1 \leq \frac{1}{2}$ 时, $D_{\lambda-1}^{(1)}=0$ ;当 $\lambda-1 \leq \frac{3}{2}$ 时, $A_{\lambda-1}^{(1)}+A_{\lambda-1}^{(2)}=0, B_{\lambda-1}^{(1)}+B_{\lambda-1}^{(2)}=0$ 。在式(10.42)~(10.49)中,都有

$$n+m > 0 \quad (10.50)$$

且  $\varphi(\lambda, m) =$

$$\frac{\Gamma(\lambda+m+1)}{\Gamma(\lambda+1)} = \begin{cases} (\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+m) & m \geq 1 \\ 1 & m = 0 \end{cases} \quad (10.51)$$

## 2. 应力强度因子

壳体的应力可以由内力表示为<sup>[30]</sup>

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{N_x}{h} + \frac{12z}{h^3} M_x \\ \sigma_y = \frac{N_y}{h} + \frac{12z}{h^3} M_y \\ \tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{h} + \frac{12z}{h^3} M_{xy} \\ \tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \\ \tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \end{cases} \quad (10.52)$$

将展开式(10.42)~(10.49)代入壳体内力与应力的有关表达式,便可以求得内力与应力在裂纹尖端的展开式。根据应力强度因



子的定义,可以得出在裂纹尖端 I、II、III 型应力强度因子与裂纹尖端场展开式首项系数之间的关系

$$K_1(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(r, 0, z) = \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{8DR}{h} (s_1^4 A_{-1/2}^{(1)} + s_2^4 A_{-1/2}^{(2)}) - \frac{12z}{h} [2(1 + \nu) D (s_1^2 A_{-1/2}^{(1)} + s_2^2 A_{-1/2}^{(2)})] \right\} \quad (10.53)$$

$$K_2(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}(r, 0, z) = \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{8DR}{h} (s_1^4 B_{-1/2}^{(1)} + s_2^4 B_{-1/2}^{(2)}) - \frac{12z}{h^3} [2(1 + \nu) D (s_1^2 B_{-1/2}^{(1)} + s_2^2 B_{-1/2}^{(2)})] \right\} \quad (10.54)$$

$$K_3(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{yz}(r, 0, z) = \sqrt{2\pi} \frac{3C}{4h} D_{1/2}^{(2)} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \quad (10.55)$$

其中  $R$  是球壳中面半径。

通常我们需要计算上述应力强度因子沿厚度的幅值

$$K_1 = [K_1(z)]_{\max}, \quad K_2 = [K_2(z)]_{\max}, \quad K_3 = [K_3(z)]_{\max} \quad (10.56)$$

## § 10.4 含裂纹 Reissner 型球壳断裂分析的局部-整体法

建立在 Reissner 型球壳裂纹尖端一般展开式的基础上,由裂纹尖端奇异元与常规壳体单元相结合的所谓局部-整体法是分析含裂纹球壳的精确实用的数值方法。

将展开式 (10.42) ~ (10.49) 代入式 (10.21)、(10.33) 和 (10.34), 可以得到广义位移  $u_r, u_\theta, w, \psi_r, \psi_\theta$  在裂纹尖端的展开式。截取这个展开式的前  $N$  阶, 再加上 5 个刚体位移项  $u_{r0}, u_{\theta0}, w_0, \psi_{r0}, \psi_{\theta0}$  构造裂纹尖端奇异元的位移模式, 然后利用应变能公式就可以导出奇异元的刚度矩阵 (参见第 4 章和第 8 章的有关推导)。计算表明, 奇异元特征尺寸  $r_s$  (对于圆形奇异元,  $r_s$  代表奇异元半

径)可取为

$$r_s = 0.04 \sim 0.1 \min(a, h) \quad (10.57)$$

其中  $\min(a, h)$  表示取裂纹半长  $a$  与厚度  $h$  的较小者。显然  $r_s \ll R$ , 它表明在推导裂纹尖端场时采用扁壳理论是合适的。

在本节的计算中,壳体的其余部分采用常规 8 节点厚壳单元<sup>[102]</sup>,它的位移模式计及了剪切变形的作用,而且作为曲面单元,可以较好地满足球面的曲率情况。

利用常规元与奇异元相连接的节点处位移的连续条件,可以推导转换矩阵 $[\Omega]$ ,实现常规元与奇异元的连接,具体推导过程可参见 § 4.3 和 § 8.3。

可以看到,局部-整体法的适用范围并不限于扁壳(虽然在裂纹尖端局部采用的是扁壳理论),而是适用于从扁壳到陡壳的各种壳体。图 10.3 是一个含中心裂纹陡球壳单元网格划分示意图。根据几何对称性,仅画出了壳体的四分之一,其中  $OXYZ$  是裂纹中心为原点的整体坐标系,节点坐标可以由球面方程给出。

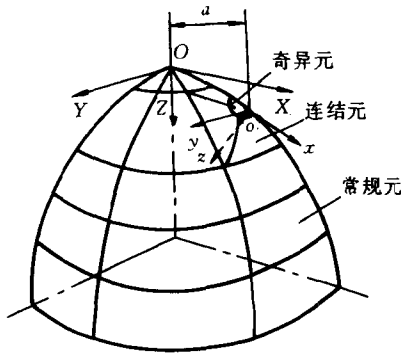


图 10.3 含裂纹球壳局部-整体分析的有限元网格

下面给出含裂纹 Reissner 型球壳的典型问题的数值结果及比较。

### 1. 边界受均匀弯矩的有限尺寸球壳

Sih<sup>[98]</sup>和 Delale<sup>[99]</sup>分别用积分变换的方法计算了球壳的弯曲

断裂问题,但他们的研究有较大的局限性,其一假定球壳为无限大体,不能计及有限尺寸的影响;其二采用扁壳理论,没有讨论是否适用于陡壳问题。局部-整体法克服了这两个局限。

考虑含长  $2a$  的中心裂纹、底部边界半径为  $L$ 、边界受均布弯矩  $M_0$  的球壳(参见图 10.1,但取消  $L/R \ll 1$  的限制),研究有限尺寸参数,无量纲曲率  $\Delta$  对应力强度因子的影响,其中

$$\Delta = \sqrt{12(1-\nu^2)}a / \sqrt{Rh} \quad (10.58)$$

这是一个典型的对称问题,仅存在 I 型应力强度因子  $K_I$ , II、III 型应力强度因子为零。应力强度因子  $K_I / (6M_0 \sqrt{\pi a} / h^2)$  的值列于表 10.1 中,并且与 Sih<sup>[98]</sup>等在无限大扁壳的假定下所得的结果作了比较。可以看到,有限尺寸影响(或者说边界影响)是较大的,特别对于曲率较大的陡壳更为显著。在表 10.1 的计算范围内,与 Sih 等<sup>[98]</sup>的结果最大相差为 30%。这表明,Sih 等的结果有一定的适用范围。从图 10.4 可以看到应力强度因子随  $a/L$  变化的情况。

表 10.1 边界受均布弯矩时的应力强度因子

$\Delta$	应力强度因子 $K_I / (6M_0 \sqrt{\pi a} / h^2)$			
	$a/L=0^{\text{①}}$	$a/L=0.1$	$a/L=0.25$	$a/L=0.5$
0.2	0.744	0.741	0.757	0.870
0.25	0.703	0.680	0.701	0.781
0.5	0.619	0.433	0.613	0.727

注:计算对象见图 10.1,取  $\nu=0.3, a/h=1$ 。  
 ①无限大扁球壳的结果取自解析解<sup>[98]</sup>。  
 ②曲率为零的球壳的结果取自对 Reissner 型平板的计算结果<sup>[42]</sup>。

为了考察应力强度因子随厚度变化的情况,取  $a/L=0.25$ ,计算结果列于表 10.2 中。图 10.5 由曲线显示了弯曲应力强度因子随厚度比的变化规律。

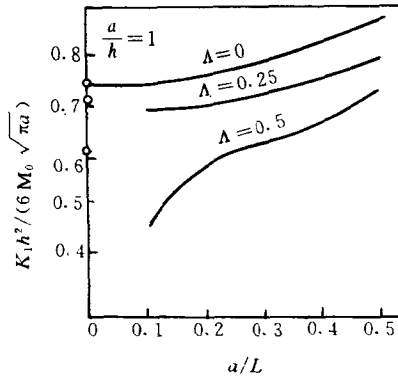
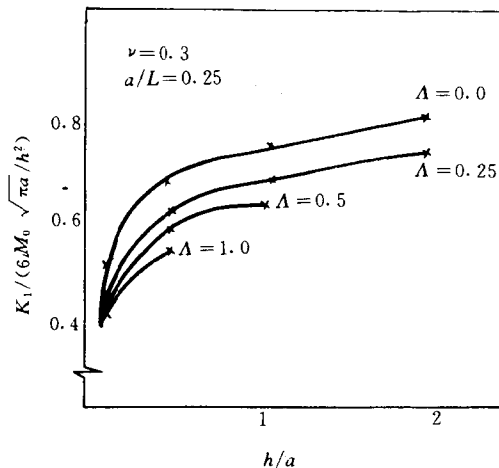
图 10.4 应力强度因子  $K_I$  随  $a/L$  的变化规律

表 10.2 应力强度因子随厚度比的变化

$\Lambda$	应力强度因子 $K_I / (6M_0 \sqrt{\pi a} / h^2)$			
	$h/a=0.15$	$h/a=0.5$	$h/a=1$	$h/a=2$
0.00	0.5337	0.6824	0.7568	0.8349
0.25	0.4650	0.6315	0.7018	0.7884
0.50	0.4449	0.6021	0.6125	
1.00	0.4040	0.5852		

注: 计算对象见图 10.1, 取  $a/L=0.25, \nu=0.3$ 。

当曲率趋于零时,球壳退化为平板。为了考察这种情形,取  $a/R=10^{-6}$  以模拟平板,取  $a/L=0.1$  以模拟无限大板(壳)。对于裂纹尖端奇异元的位移模式(设  $\lambda=1/2, 1, 3/2, 2, \dots, N-1/2, N, \dots$ )取不同阶数,以考察位移模式阶数对精度的影响。从表 10.3 的计算结果可以看到,当  $N=2$ (4 阶)时,与无限大板理论解的误差为 2%,当  $N=3$ (6 阶)时,误差为 0.4%。可以认为,对于 I 型问题,当位移模式的阶数取到 4 阶或 6 阶时,已经有较高的精度。

图 10.5 应力强度因子  $K_I$  随  $h/a$  的变化规律表 10.3 奇异元阶数对应力强度因子  $K_I$  精度的影响

局部-整体法解答		解析解 <sup>[24]</sup>	乘子
$N=2$	$N=3$		
0.75729	0.74096	0.744	$6M_0 \sqrt{\pi a} / h^2$

注:局部-整体法的计算对象见图 10.1,取  $a/R=10^{-5}$ ,  $a/h=1$ ,  $a/L=0.1$ ,  $\nu=0.3$ 。

## 2. 边界受均匀扭矩的有限尺寸球壳

计算对象同上例(见图 10.1),仅边界外载由均布弯矩改为均布扭矩  $M_t$ 。这是一个反对称问题,存在 I、III 型应力强度因子  $K_2$  和  $K_3$ , I 型应力强度因子  $K_1$  为零。Delale<sup>[88,99]</sup>曾经用积分变换的方法获得了无限大受扭 Reissner 型球壳的解析解。表 10.4 和 10.5 则给出了由局部-整体法计算的有限尺寸受扭 Reissner 型球壳的数值结果。可以看到,当  $\Lambda \rightarrow 0$ ,  $a/L \rightarrow 0$  时,本文的结果趋于由 Delale<sup>[88]</sup>给出的解答。

表 10.4 受扭球壳 II 型应力强度因子  $K_2/(6M_r \sqrt{\pi a}/h^2)$ 

$\Delta$	局部-整体法解答 <sup>[103]</sup>			解析解 <sup>[88]</sup>
	$a/L=0.5$	$a/L=0.25$	$a/L=0.1$	$a/L=0$
0	0.8698	0.7501	0.7020	0.705
0.25	0.7248	0.7227	0.6832	

注:计算对象见图 10.1,取  $a/h=0.5, \nu=0.3, \Delta$  已由式(10.58)给出。

表 10.5 受扭球壳 III 型应力强度因子  $K_3/(6M_r \sqrt{\pi a}/h^2)$ 

$\Delta$	局部-整体法解答 <sup>[103]</sup>			解析解 <sup>[88]</sup>
	$a/L=0.5$	$a/L=0.25$	$a/L=0.1$	$a/L=0$
0	-0.1023	-0.0920	-0.0461	-0.036
0.25	-0.1246	-0.0977	-0.0455	

注:计算对象见图 10.1,取  $a/h=0.5, \nu=0.3$ 。

在曲率趋于零的情形(取  $a/R=10^{-6}$ ),对于裂纹尖端奇异元位移模式(设  $\lambda=1/2, 1, 3/2, 2, \dots, N-1/2, N, \dots$ )取不同阶数,以考察位移模式阶数对精度的影响。从表 10.6 的计算结果可以看到,对于 II 型和 III 型应力强度因子,需取  $N=4$ (8 阶)或  $N=5$ (10 阶),才能有较为满意的精度。这比对称情形要求的阶数要高。此外 III 型应力强度因子对奇异元边界设置的与常规元连接的节点数较为敏感。例如对于表 10.6 所计算的问题,在奇异元半圆周上设置 5 个和 9 个节点,II 型应力强度因子数值变化不大。而在设置 5 个节点时 III 型应力强度因子数值几乎下降 1/2。为了保证 II 型和 III 型应力强度因子都有较为满意的精度,奇异元边界上设置的与常规元连接的节点数要稍多一些(半个圆周上 9 个以上的节点)。

表 10.6 奇异元阶数对 II、III 型应力强度因子精度的影响

$K_2/(6M_0 \sqrt{\pi a}/h^2)$			$K_3/(6M_0 \sqrt{\pi a}/h^2)$		
$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=3$	$N=4$	$N=5$
0.7220	0.7431	0.7501	-0.0979	-0.0933	-0.0920

注：计算对象见图 10.1，周边受均匀扭矩  $M_0$ ，取  $a/R=10^{-6}$ ， $a/h=0.5$ ， $a/L=0.25$ ， $\nu=0.3$ 。

### 3. 含偏心裂纹的球壳

如图 10.6，边长为  $2L$  的方形球壳含长  $2a$  的偏心裂纹，裂纹偏离中心线距离为  $a$ ，球壳边界作用均布弯矩  $M_0$ 。计算中取  $a/L=0.25$ 。

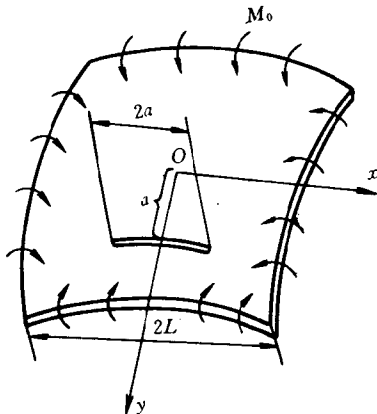


图 10.6 含偏心裂纹的方形球壳

虽然边界上仅作用均布弯矩，但由于几何上的不对称性，这个问题成为包括 I、II、III 型的复合型断裂问题，I、II、III 型应力强度因子的计算结果分别列于表 10.7~10.9 中。可以看到，当  $h/a$  较大时，I 型应力强度因子是起主导作用的断裂参量，II、III 型应力强度因子的影响较小，可以忽略；当  $h/a$  变小时，II、III 型应力强度因子的影响增大，特别是 II 型应力强度因子必须与 I 型应力强度因子一道考虑。

在文献[47]中还计算了含孔边裂纹球壳问题。

表 10.7 偏心裂纹球壳 I 型应力强度因子

$\Lambda$	应力强度因子 $K_1/(6M_0 \sqrt{\pi a}/h^2)$			
	$h/a=0.15$	$h/a=0.5$	$h/a=1$	$h/a=2$
0	0.5063	0.6805	0.7473	0.9309
0.25	0.4421	0.6045	0.6658	0.7433

注:计算对象见图 10.6,  $\nu=0.3, a/L=0.25, \Lambda$  已由式(10.58)给出。

表 10.8 偏心裂纹球壳 II 型应力强度因子

$\Lambda$	应力强度因子 $K_2/(6M_0 \sqrt{\pi a}/h^2)$			
	$h/a=0.15$	$h/a=0.5$	$h/a=1$	$h/a=2$
0	0.1811	0.0150	-0.0092	-0.0129
0.25	0.1736	0.0105	-0.0133	-0.0022

注:计算对象见图 10.6, 取  $\nu=0.3, a/L=0.25$ 。

表 10.9 偏心裂纹球壳 III 型应力强度因子

$\Lambda$	应力强度因子 $K_3/(6M_0 \sqrt{\pi a}/h^2)$			
	$h/a=0.15$	$h/a=0.5$	$h/a=1$	$h/a=2$
0	-0.0954	-0.0823	-0.0430	-0.0114
0.25	-0.0923	-0.0785	-0.0392	-0.0063

注:计算对象见图 10.6, 取  $\nu=0.3, a/L=0.25$ 。

#### 4. 不同支承条件下承受均匀内压的含裂纹球壳

参考图 10.1, 底部直径为  $2L$  的球冠含长  $2a$  的中心裂纹。取  $L/R=\pi/4$ , 设球壳内侧承受均匀压力  $q$ , 考虑下述三种边界条件:

① 自由边。此时沿底部中面方向作用均匀拉力  $\frac{1}{2}qR$ , 与内压平衡。

② 简支边。底部边界位移为零, 转角不受约束。

③ 固支边。底部边界的位移和转角均为零。



在计算中,取厚度参数为  $\delta$

$$\delta = \frac{D}{Ca^2} = \frac{1}{5(1-\nu)} \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^2 \quad (10.59)$$

计算结果列于表 10.10 中。可以看到,在所计算的范围内,自由边界球壳的应力强度因子与简支边界球壳的应力强度因子相比,最大可以相差 20%,与固支球壳的应力强度因子相比,最大可以相差 25%。可见边界支承条件对应力强度因子有较大的影响。

表 10.10 支承条件对应力强度因子的影响

支承条件	应力强度 $K_1/(qR \sqrt{\pi a}/(2h))$					
	$\Lambda=0.2$		$\Lambda=0.6$		$\Lambda=1.0$	
	$\delta=0.1$	$\delta=1$	$\delta=0.1$	$\delta=1$	$\delta=0.1$	$\delta=1$
自由	1.127	1.222	1.299	1.592	1.609	1.800
简支	1.035	1.108	1.286	1.332	1.512	1.652
固支	1.037	1.065	1.215	1.270	1.441	1.579

注:计算对象见 10.1,壳受均匀内压  $q$ ,取  $L/R=\pi/4, \nu=0.3, \Lambda$  和  $\delta$  分别见式 (10.58)和(10.59)。

## § 10.5 鼓胀系数

从断裂力学知道<sup>[82,83]</sup>,远场为均匀拉伸应力的无限板内含一条长  $2a$  的穿透裂纹,其裂纹尖端应力强度因子为

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (10.60)$$

设半径为  $R$ ,壁厚为  $h$  的球壳受均匀内压  $q$ ,则壳体的应力为

$$\sigma = \frac{qR}{2h} \quad (10.61)$$

如果此球壳中存在一条长  $2a$  的裂纹,则由于径向载荷的作用,在裂纹面将有附加弯曲效应(对于平面问题,仅有面内拉伸效应),即所谓鼓胀效应。这样球壳裂纹的应力强度因子要大于对应受拉伸板的结果,即大于式(10.60)的结果。1965年,Folias<sup>[89]</sup>首先应用

Kirchhoff 经典壳体弯曲断裂理论研究了鼓胀效应问题。他提出, 对于受内压的含裂纹球壳, 应力强度因子公式可以表示为

$$K_1 = M\sigma \sqrt{\pi a} \quad (10.62)$$

其中  $M$  称为鼓胀系数, 它表示球壳的应力强度因子与对应受拉伸平板的应力强度因子之比。Folias 根据自己的研究, 提出了鼓胀系数的近似公式

$$M = (1 + 0.59\Lambda^2)^{\frac{1}{2}} \quad (10.63)$$

其中无量纲曲率  $\Lambda$  已由式(10.58)给出。

Folias 提出的鼓胀系数公式使用方便, 已经在工程中得到应用。但是该公式有一个明显的不足, 即没有考虑壳的横向剪切变形的影响。为了研究这种影响的大小, 采用 Reissner 型球壳断裂分析计算的鼓胀系数<sup>[43]</sup>列于表 10.11 中, 并与 Folias 的结果作了比较。

表 10.11 鼓胀系数  $M(\Lambda, \delta)$

$\Lambda$	经典解	Reissner 型球壳断裂分析的结果				
	$\delta=0$	$\delta=0.001$	$\delta=0.01$	$\delta=0.1$	$\delta=1$	$\delta=2$
0.2	1.022	1.032	1.099	1.127	1.222	1.301
0.4	1.073	1.078	1.144	1.178	1.305	1.381
0.6	1.142	1.146	1.181	1.299	1.592	1.673
1.0	1.316	1.320	1.361	1.609	1.800	1.913
1.2	1.417	1.411	1.601	1.839	2.002	
1.6	1.637	1.652	1.792	2.052		
2.0	1.876	1.841	2.022	2.110		
2.2	2.000	2.001	2.096	2.192		

注: 计算对象见图 10.1, 底部边界中面方向作用均匀拉力  $\frac{1}{2}qR$ , 与内压平衡。 $M$ 、 $\Lambda$  和  $\delta$  的定义分别见式(10.62)、(10.58)和(10.59)。

可以看到, 鼓胀系数  $M$  不仅是无量纲曲率  $\Lambda$  的函数, 也是厚度参数  $\delta$  的函数。由局部-整体法求得的 Reissner 型球壳的鼓胀系

数随  $\lambda$  和  $\delta$  的变化情况显示在图 10.7 中。仅在  $\delta$  很小或者说  $h/a$  很小时, Folias 提出的经典鼓胀系数公式(10.63)才是准确的。对于实际问题, 一般有  $0 < \Delta < 2, 0 < \delta < 2$ 。在这个范围内, 经典鼓胀系数公式的最大误差达 46%, 并且是偏于不安全方面的。为此, 下面根据 Reissner 型球壳的断裂理论和分析提出鼓胀系数一个新的拟合公式<sup>[43]</sup>

$$M(\Delta, \delta) = \sqrt{1 + 0.59\Delta^2(1 + 1.2\delta^{\frac{1}{3}}\lambda e^{-\lambda})} \quad (10.64)$$

此公式与上述数值结果的最大误差为 4%。

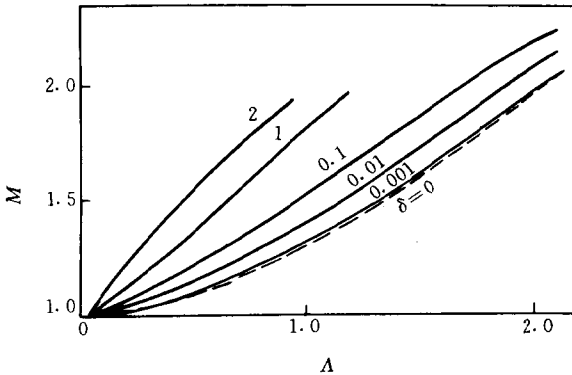


图 10.7 鼓胀系数随  $\Delta$  和  $\delta$  的变化

## § 10.6 几点结论

①本章采用 Reissner 型壳体理论研究含裂纹球壳的弯曲断裂问题, 有效克服了 Kirchhoff 经典壳体理论在研究断裂问题时的理论缺陷。所求得的 Reissner 型球壳裂纹尖端场展开式的作用类似于平面断裂问题中的 Williams 展开式, 较精确地揭示了球壳裂纹尖端场的性质, 其首项与文献[88, 98]的结果一致。

②Reissner 型球壳裂纹尖端场展开式可以作为发展含裂纹球壳数值分析方法的理论基础, 原则上可以把平面断裂问题中运用 Williams 展开式的一套计算方法推广到 Reissner 型球壳的弯曲

断裂问题的分析中去。根据 Reissner 型球壳裂纹尖端场展开式构造的高阶奇异元与常规元相结合的局部-整体法,是一种对含裂纹球壳断裂分析有普遍适用意义而又精确有效的方法。

③为了获得较满意的精度,奇异元特征尺寸  $r$  (对于圆形奇异元,  $r$  代表其半径)可取为  $0.04 \sim 0.1 \min(a, h)$ , 其中  $\min(a, h)$  表示取裂纹半长  $a$  与厚度  $h$  中较小者;奇异元位移模式阶数可取  $O(r^{5/2}) \sim O(r^{9/2})$  阶。对于对称 I 型问题,奇异元半径可以取得稍大一点,位移模式阶数稍低一点;对于复合型断裂问题,要求奇异元半径小一点,位移模式阶数高一点,并且奇异元边界上设置的常规元节点也应多一点。

④由 Kirchhoff 经典壳体理论所得到的含裂纹球壳的鼓胀系数公式(10.63)是偏于不安全的,只适用于  $h/a$  较小的情况;在一般情况下,采用作者提出的新鼓胀系数公式(10.64)更为合理。

## 第十一章 含裂纹 Reissner 型圆柱壳 的断裂分析

含裂纹圆柱壳的研究对于许多工程构件（如飞机结构、压力容器、管道等）的安全设计有重要的应用价值。早期对于含裂纹圆柱壳的研究<sup>[91~95]</sup>应用 Kirchhoff 经典薄壳理论，有较严重的理论缺陷，如横向剪力在裂纹尖端具有  $r^{-3/2}$  的奇异性，Ⅲ型应力强度因子不是独立的物理量，弯曲应力与薄膜应力的角分布函数不相同。以后虽然有学者<sup>[104]</sup>应用 Reissner 型壳体理论研究了含裂纹圆柱壳问题，但只限于无限大圆柱壳并仅得到了裂纹尖端应力场展开式的首项表达式，在理论和应用方面都还缺乏普遍意义。本章应用摄动法获得了 Reissner 型圆柱壳裂纹尖端场的一般解，较全面地揭示了裂纹尖端附近的力学性质，并在此基础上发展了对含裂纹圆柱壳的分析有普遍适用意义的局部-整体法。

### § 11.1 含轴向裂纹 Reissner 型圆柱壳的基本 方程与摄动解

#### 1. 基本方程

如图 11.1，考虑一半径为  $R$ ，厚度为  $h$ ，含一条长  $2a$  的轴向穿透裂纹的圆柱壳。将坐标原点设在裂纹尖端， $x$  轴沿裂纹延长线方向。在裂纹尖端局部区域条件(10.3)总能得到满足，所以下面的研究采用扁壳理论。按照与推导 Reissner 型球壳基本方程相同的方式，可以求得 Reissner 型圆柱壳的基本方程为

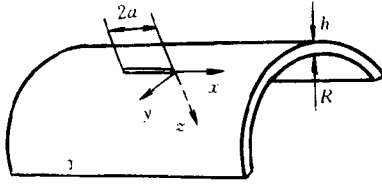


图 11.1 含轴向穿透裂纹的圆柱壳

$$\begin{cases} D\left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y}\right) + C\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x\right) = 0 \\ D\left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y}\right) + C\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y\right) = 0 \\ C\left(\nabla^2 w - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + q = 0 \end{cases} \quad (11.1)$$

$$\frac{1}{B} \nabla^4 \varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (11.2)$$

其中  $w$  为挠度,  $\psi_x$  和  $\psi_y$  分别是变形前垂直于中面的直线段变形后在  $Oxz$  与  $Oyz$  平面内的转角;  $D$  和  $C$  分别是由式 (5.11) 和 (5.26) 表示的弯曲刚度与剪切刚度,  $B = Eh$  为壳的抗拉压刚度,  $E$  为杨氏模量,  $\nu$  为泊松比。中面内为  $N_x, N_y$  和  $N_{xy}$  与应力函数  $\varphi$  的关系为

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (11.3)$$

弯矩  $M_x, M_y$ , 扭矩  $M_{xy}$ , 横向剪力  $Q_x$  和  $Q_y$  能够表示为

$$\begin{cases} M_x = -D\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right) \\ M_y = -D\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right) \\ M_{xy} = -\frac{1-\nu}{2} D\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right) \end{cases} \quad (11.4)$$

$$\begin{cases} Q_x = C\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x\right) \\ Q_y = C\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y\right) \end{cases} \quad (11.5)$$

引入位移函数  $F, f$

$$\psi_x = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \psi_y = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \quad (11.6)$$

将式(11.6)代入(11.1)和(11.2),经整理并由下式

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a} \quad (11.7)$$

无量纲化,则基本方程可以简化为

$$\begin{cases} \nabla^4 F - \Lambda^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi^2} = 0 \\ \nabla^4 \tilde{\varphi} + \Lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \\ w = (1 - \delta \nabla^2)F + \text{Im}\Phi \\ \nabla^2 f - 4\mu^2 f = 4\mu^2 \text{Re}\Phi \end{cases} \quad (11.8)$$

式中  $\Phi = \Phi(\xi + i\eta)$  为解析函数

$$\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{DB}}, \quad \Lambda^2 = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}a^2}{Rh}, \quad \delta = \frac{D}{Ca^2}, \quad 4\mu^2 = \frac{2}{(1-\nu)\delta} \quad (11.9)$$

设裂纹面不受外力,则裂纹面的边界条件可以表示为

$$\begin{cases} M_y = M_{xy} = Q_y = 0 \\ N_y = N_{xy} = 0 \end{cases} \quad (11.10)$$

## 2. 摄动解

将位移和应力函数均展成  $\Lambda^2$  的幂级数

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{2k} \tilde{\varphi}_k, & F &= \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{2k} F_k, & w &= \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{2k} w_k \\ f &= \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{2k} f_k, & \Phi &= \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{2k} \Phi_k \end{aligned} \quad (11.11)$$

将展开式(11.11)代入基本方程(11.8),比较 $\Lambda^2$ 的各阶项,可以逐次求得各阶摄动方程

(1) 当 $k=0$ 时

$$\begin{cases} \nabla^4 \tilde{\varphi}_0 = 0 \\ \nabla^4 F_0 = 0 \\ w = (1 - \delta \nabla^2) F_0 + \text{Im} \Phi_0 \\ \nabla^2 f_0 - 4\mu^2 f_c = 4\mu^2 \text{Re} \Phi_0 \end{cases} \quad (11.12)$$

从方程(11.12)和裂纹面的边界条件(11.10),可以导出位移与应力函数在裂纹尖端零阶摄动方程的解答

a. 对于 $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_0 = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \{ & \bar{A}_\lambda [\cos(\lambda-1)\theta - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \cos(\lambda+1)\theta] + \\ & \bar{B}_\lambda [\sin(\lambda-1)\theta - \sin(\lambda+1)\theta] \} \end{aligned} \quad (11.13)$$

$$\begin{aligned} F_0 = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \{ & A_\lambda [\cos(\lambda-1)\theta - \\ & \frac{4 + (\lambda-1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} \cos(\lambda+1)\theta] + B_\lambda [\sin(\lambda-1)\theta + \\ & \frac{4 - (\lambda+1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} \sin(\lambda+1)\theta] \} \end{aligned} \quad (11.14)$$

$$\begin{aligned} f_0 = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \frac{\mu^2}{\lambda} \{ & -4\delta\lambda A_\lambda [\sin(\lambda-1)\theta - \sin(\lambda+1)\theta] + \\ & (D_{\lambda-1}^{(2)} + 4\delta\lambda B_\lambda) [\cos(\lambda-1)\theta - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \cos(\lambda+1)\theta] \} + \\ & \sum_{\lambda} \sum_{n,m=0}^{\infty} [-4\delta\lambda A_\lambda \sin(\lambda-1+2n)\theta + \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} \cdot \\ & (D_{\lambda-1}^{(2)} - 4\delta\lambda B_\lambda) \cos(\lambda-1+2n)\theta] \cdot \\ & \frac{(-1)^n \mu^{2(m+n)} r^{\lambda-1+2(m+n)}}{n! \phi(\lambda+n-2, n) m! \phi(\lambda-1+2n, m)} \end{aligned} \quad (11.15)$$

$$\begin{aligned} w_0 = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \{ & A_\lambda [\cos(\lambda-1)\theta - \frac{4 + (\lambda-1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} \cdot \\ & \cos(\lambda+1)\theta] + B_\lambda [\sin(\lambda-1)\theta + \frac{4 - (\lambda+1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} \cdot \end{aligned}$$



$$\cos(\lambda + 1)\theta] + \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} D_{\lambda-1}^{(2)} \sin(\lambda - 1)\theta \quad (11.16)$$

b. 对于  $\lambda=1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_0 = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \{ & \tilde{A}_{\lambda} [\cos(\lambda - 1)\theta - \cos(\lambda + 1)\theta] + \\ & \tilde{B}_{\lambda} [\sin(\lambda - 1)\theta - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \sin(\lambda + 1)\theta] \} \end{aligned} \quad (11.17)$$

$$\begin{aligned} F_0 = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \{ & A_{\lambda} [\cos(\lambda - 1)\theta + \frac{4 - (\lambda + 1)(1 - \nu)}{(\lambda + 1)(1 - \nu)} \cdot \\ & \cos(\lambda + 1)\theta] + B_{\lambda} [\sin(\lambda - 1)\theta - \\ & \frac{4 + (\lambda - 1)(1 - \nu)}{(\lambda + 1)(1 - \nu)} \sin(\lambda + 1)\theta] \} \end{aligned} \quad (11.18)$$

$$\begin{aligned} f_0 = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \frac{\mu^2}{\lambda} \{ & - (D_{\lambda-1}^{(1)} + 4\delta\lambda A_{\lambda}) [\sin(\lambda - 1)\theta - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \cdot \\ & \sin(\lambda + 1)\theta] + 4\delta\lambda B_{\lambda} [\cos(\lambda - 1)\theta - \cos(\lambda + 1)\theta] \} + \\ & \sum_{\lambda} \sum_{m, n=0}^{\infty} \left[ - \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1 + 2n} (D_{\lambda-1}^{(1)} + 4\delta\lambda A_{\lambda}) \cdot \right. \\ & \left. \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta] + 4\delta\lambda B_{\lambda} \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \cdot \\ & \frac{(-1)^n \mu^{2(m+n)} r^{\lambda-1+2(m+n)}}{n! \phi(\lambda + n - 2, n) m! \phi(\lambda - 1 + 2n, m)} \end{aligned} \quad (11.19)$$

$$\begin{aligned} \omega_0 = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \{ & A_{\lambda} [\cos(\lambda - 1)\theta + \frac{4 - (\lambda + 1)(1 - \nu)}{(\lambda + 1)(1 - \nu)} \cdot \\ & \cos(\lambda + 1)\theta] + B_{\lambda} [\sin(\lambda - 1)\theta - \frac{4 + (\lambda - 1)(1 - \nu)}{(\lambda + 1)(1 - \nu)} \cdot \\ & \sin(\lambda + 1)\theta] \} + \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} D_{\lambda-1}^{(1)} \cos(\lambda - 1)\theta \end{aligned} \quad (11.20)$$

在式(11.13)~(11.20)中, 都有

$$m + n > 1 \quad (11.21)$$

$$D_{\lambda-1}^{(1)} = 0, \quad D_{\lambda-1}^{(2)} = 0, \quad \text{当 } \lambda < \frac{3}{2} \quad (11.22)$$

在式(11.15)和(11.19)中

$$\phi(\lambda, m) = \Gamma(\lambda + m + 1) / \Gamma(\lambda + 1) \quad (11.23)$$

其中  $\Gamma(\lambda)$  为  $\Gamma$  函数。

(2) 当  $k \geq 1$  时, 基本方程的第  $k$  阶摄动方程为

$$\begin{cases} \nabla^4 \tilde{\varphi}_k = -\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{K}^2} w_{k-1} \\ \nabla^4 F_k = \frac{\mathcal{F} \tilde{\varphi}_{k-1}}{\mathcal{K}^2} \\ w_k = (1 - \delta \nabla^2) F_k + \text{Im} \Phi_k \\ \nabla^2 f_k - 4\mu^2 f_k = 4\mu^2 \text{Re} \Phi_k \end{cases} \quad (11.24)$$

利用第  $k$  阶摄动方程(11.24)和边界条件(11.10)可以求得第  $k$  阶摄动解,具体表达式见文献[44]。

## § 11.2 含轴向裂纹 Reissner 型圆柱壳的断裂分析

研究一长  $2L$ , 厚  $h$ , 中面半径为  $R$ , 含长  $2a$  的轴向裂纹的圆柱壳。利用对称性可取它的  $1/4$  进行分析。如图 11.2 划分有限元网格。

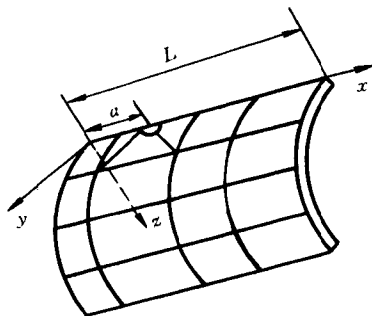


图 11.2 含轴向裂纹圆柱壳的网格

对轴向裂纹尖端位移场摄动解截取前若干项构造高阶奇异元,用退化的等参厚壳元<sup>[32]</sup>作为奇异元外的常规单元,该单元将变形后法线的两个转角作为独立的节点自由度。计算结果用无量纲应力强度因子表示:

a. 当壳体受均匀弯矩  $M_0$  时

$$K_1 = (K_{mb} + K_{bb}) \frac{6M_0}{h^2} \sqrt{\pi a} \quad (11.25)$$

b. 当壳体受均匀内压  $q_0$  时

$$K_1 = (K_{mm} + K_{bm}) \frac{q_0 R}{h} \sqrt{\pi a} \quad (11.26)$$

其中  $K_{mb}$  和  $K_{mm}$  为无量纲薄膜应力强度因子,  $K_{bb}$  和  $K_{bm}$  为无量纲弯曲应力强度因子。

### 1. 有限尺寸柱壳边界受均匀弯矩 $M_0$ 的作用

对于所研究的问题,由式(11.25)所定义的无量纲应力强度因子的结果列于表 11.1 中。取  $a/L=0.01$  模拟无限大壳体,这时局部-整体法所计算的总的 I 型应力强度因子  $K_1$  值与解析解<sup>[164]</sup>比较,误差为 1%,而由畸变元<sup>[105]</sup>所得结果与解析解比较,误差为 14%。

表 11.1 边界受均匀弯矩的无量纲应力强度因子

$a/L$	0 <sup>①</sup>	0.01	0.1	0.2
$K_{bb}$	0.832	0.815	0.820	0.821
$K_{mb}$	0.0085	0.0158	0.0189	0.0201
$\tilde{K}_1$ <sup>②</sup>	0.841	0.831	0.839	0.841

注:取  $R/h=10$ ,  $\Lambda = \sqrt{12(1-\nu^2)}a/\sqrt{Rh}=0.25$ 。  
 ① 取自文献[104]的解析解。  
 ②  $\tilde{K}_1 = K_1/(6M_0/\sqrt{\pi a}h^2)$  为总的无量纲 I 型应力强度因子。

### 2. 受内压圆柱壳的鼓胀系数

与含裂纹球壳一样,含裂纹圆柱壳受均匀内压时,由于径向载荷的作用,在裂纹面将有附加弯曲效应,即所谓鼓胀效应。Folias<sup>[91]</sup>首先定义受均匀内压  $q_0$  的鼓胀系数

$$M = K_{mm} + K_{bm} = K_1/(\sigma \sqrt{\pi a}) \quad (11.27)$$

其中受均匀内压圆柱壳的环向应力为  $\sigma=q_0R/h$ 。Folias 采用经典薄壳理论,提出了鼓胀系数的一个近似公式

$$M(\Lambda) = (1 + 0.49\Lambda^2)^{1/2} \quad (11.28)$$

这个鼓胀系数的近似公式仅依赖于参数  $\Lambda$ ,它已经在工程中被应用。作者<sup>[44]</sup>采用 Reissner 型壳体理论研究了这一问题,表明鼓胀

系数还与参数  $\delta = D/(Ca^2)$  相关, 这个参数反映了壳的剪切刚度对鼓胀系数的影响。由 Reissner 型壳体理论所计算的鼓胀系数的结果列于表 11.2 中。可以看出, 仅当厚度参数  $\delta$  较小时 (由式 (10.59), 也就是  $h/a$  较小时), 经典结果才适用。当  $\delta = 0.001$  时, 由 Reissner 型壳体理论计算的结果与经典公式 (11.28) 的结果相差小于 6%, 但是随着  $\delta$  增大, 二者之间的误差增大, 最大相差 34%, 并且经典公式 (11.28) 的结果是偏于不安全的。作为采用 Reissner 型壳体理论对经典公式 (11.28) 的修正, 作者提出如下含轴向裂纹圆柱壳的鼓胀系数公式 (不计筒壳长度方向的有限尺寸的影响)

$$M(\Lambda, \delta) = (1 + 0.49\Lambda^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{4}{3}\Lambda\delta^{\frac{1}{4}}e^{-2\Lambda}\right) \quad \Lambda < 3 \quad (11.29)$$

表 11.2 含轴向裂纹圆柱壳的鼓胀系数

$\Lambda$	鼓胀系数 $M(\Lambda, \delta)$				
	$\delta=0$ <sup>①</sup>	$\delta=0.001$	$\delta=0.05$	$\delta=0.1$	$\delta=0.5$
0.2	1.01	1.04	1.11	1.13	1.16
0.4	1.04	1.09	1.15	1.19	1.24
0.6	1.08	1.14	1.19	1.26	1.45
1.0	1.22	1.27	1.28	1.34	1.28
1.2	1.31	1.28	1.35	1.39	
1.6	1.50	1.47	1.49	1.52	
2.0	1.72	1.78	1.67	1.93	
3.0	2.23	2.34	2.29		
4.0	2.98	3.01			
5.0	3.65	3.86			
6.0	4.33	4.49			

注: 取  $a/L=0.03$  以模拟无限大板。  
<sup>①</sup>由 Kirchhoff 壳体理论对含轴向裂纹无限大圆柱壳的解析结果<sup>[91]</sup>。

鼓胀系数可以分解为面内拉伸分量  $K_{mm}$  与弯曲分量  $K_{bm}$ , 它们对厚度参数  $\delta$  的敏感程度是不相同的。图 11.3 和图 11.4 分别画出了  $K_{mm}$  与  $K_{bm}$  受  $\delta$  影响的曲线。可以看到, 鼓胀系数的面内拉伸分量  $K_{mm}$  受  $\delta$  的影响小一些, 且随  $\delta$  趋于零而趋于经典公式 (11.28) 的值; 弯曲分量  $K_{bm}$  受  $\delta$  的影响较大, 且当  $\delta=0.001$  时仍与经典公式 (11.28) 的结果有一定的差异。图 11.5 给出了  $K_{mm}$  与  $K_{bm}$  叠加的结果, 即鼓胀系数在不同的  $\delta$  值下的变化曲线。

采用 Kirchhoff 板理论的经典鼓胀系数公式 (11.28) 与采用

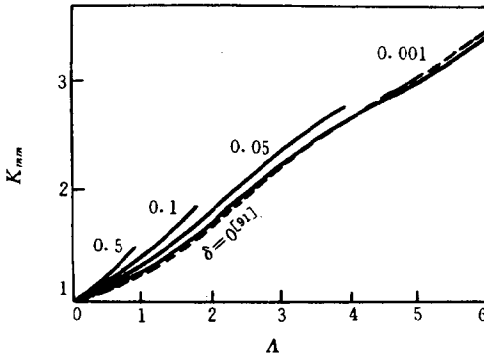


图 11.3 鼓胀系数的面内拉伸分量  $K_{mm}$

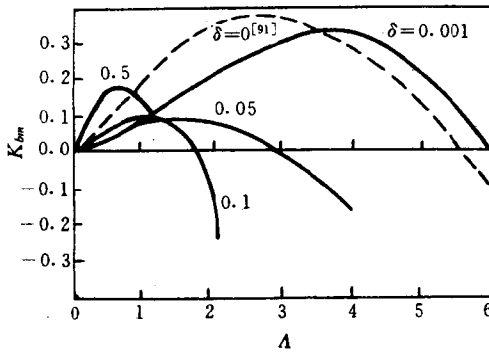


图 11.4 鼓胀系数的弯曲分量  $K_{bm}$

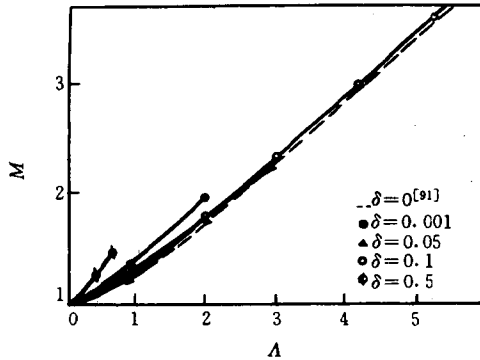


图 11.5 总的鼓胀系数  $M=K_{mm}+K_{bm}$

Reissner 型壳体理论的改进公式(11.29)是针对无限大筒壳与  $L/a$  很大的筒壳的,没有考虑有限尺寸对鼓胀系数的影响。表 14.3 则显示了  $a/L$  对鼓胀系数的影响。当  $\delta=0.5$  时,计入有限尺寸影响的计算结果与经典值相差最大达 41%。

表 11.3 有限尺寸对鼓胀系数的影响

A	鼓胀系数 M				
	$\delta=0$	$\delta=0.001$		$\delta=0.5$	
	$a/L=0$	$a/L=0.03$	$a/L=0.2$	$a/L=0.03$	$a/L=0.2$
0.6	1.09	1.14	1.25	1.44	1.54
1.0	1.22	1.27	1.41	1.28	1.42
6.0	4.33	4.47	4.69		

①由 Kirchhoff 壳体理论对含轴向裂纹无限大圆柱壳的解析结果。

### 3. 几点结论

① 本节推导的含轴向裂纹 Reissner 型圆柱壳裂纹尖端应力应变场(包括 I、II、III 型)为应用局部-整体法及其它数值方法分析含轴向裂纹圆柱壳提供了严格的力学基础。

② 构造 Reissner 型圆柱壳轴向裂纹尖端奇异元位移模式,

对于对称 I 型问题,当曲率较小时( $\Delta < 2$ ),只需采用一阶摄动解,位移表达式取到  $r^{7/2}$  阶;当曲率较大时,需考虑二阶摄动解。

③ 对于  $h/a$  很小的情形,由 Kirchhoff 壳体理论计算的鼓胀系数(见近似公式(11.28))基本适用;对于  $h/a$  较大的情形,则必须采用 Reissner 型壳体理论进行计算(见修正公式(11.29))。在本节所给的计算参数范围内( $a/L$  很小时),采用 Reissner 型壳体理论与采用 Kirchhoff 壳体理论计算的鼓胀系数相差最大达 34%。

④ 有限尺寸亦对应力强度因子和鼓胀系数有影响。在本节计算的范围内,采用 Reissner 型壳体理论计算的有限尺寸圆柱壳轴向裂纹的鼓胀系数与无限长圆柱壳的 Kirchhoff 经典鼓胀系数相比,最大相差达 41%。

⑤ 在本小节的计算中,奇异元的最佳尺寸为  $0.1a$ 。

### § 11.3 环向裂纹问题

考虑半径为  $R$ ,厚度为  $h$ ,含一条长  $2a$  的环向穿透裂纹的圆柱壳。将坐标原点设在裂纹尖端, $x$  轴沿裂纹延长线方向。按照扁壳理论,可以导出 Reissner 型圆柱壳的基本方程

$$\begin{cases} D\left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y}\right) + C\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x\right) = 0 \\ D\left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y}\right) + C\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y\right) = 0 \\ C(\nabla^2 w - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = 0 \end{cases} \quad (11.30)$$

$$\frac{1}{B} \nabla^4 \varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (11.31)$$

除坐标方向的区别外,基本方程(11.30)和(11.31)中各符号的意义与方程(11.1)和(11.2)中的相同。按式(11.6)引入位移函数并由式(11.7)无量纲化,基本方程(11.30)和(11.31)能够简化为

$$\begin{cases} \nabla^4 F - \Lambda^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \eta^2} = 0 \\ \nabla^4 \tilde{\varphi} + \Lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0 \\ w = (1 - \delta \nabla^2) F + \text{Im} \Phi \\ \nabla^2 f - 4\mu^2 f = 4\mu^2 \text{Re} \Phi \end{cases} \quad (11.32)$$

按与 § 11.1 相同的方式, 将位移和应力函数均展成  $\Lambda^2$  的幂级数形式

$$(F, \tilde{\varphi}, f, w, \Phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{2k} (F_k, \tilde{\varphi}_k, f_k, w_k, \Phi_k) \quad (11.33)$$

将式(11.33)代入基本方程(11.32), 比较  $\Lambda^2$  的各阶项, 可以得到基本方程的各阶摄动方程。将各阶摄动方程结合裂纹面的边界条件进行特征展开, 可以得到位移和应力函数在裂纹尖端的渐近展开式, 并在此基础上发展分析含环向裂纹 Reissner 型圆柱壳的局部-整体法。

文献[106]采用局部-整体法分析了含环向裂纹 Reissner 型圆柱壳的典型问题, 在  $a/L$  很小的情形, 与 Delale 和 Erdogan 对于无限长环向裂纹圆柱壳的解析解<sup>[107]</sup>的误差小于 2%。

鼓胀系数是工程分析中的一个重要参数。Folias<sup>[92]</sup>根据 Kirchhoff 壳体理论, 提出了一个计算含环向裂纹圆柱壳鼓胀系数的近似公式

$$M(\Lambda) = (1 + 0.097\Lambda^2)^{\frac{1}{2}} \quad (11.34)$$

式中无量纲曲率  $\Lambda = \sqrt[3]{12(1-\nu^2)a} / \sqrt{Rh}$ 。采用 Reissner 型壳体理论计算鼓胀系数, 发现式(11.34)是偏于不安全的, 最大误差达 30%。由 Reissner 型壳体理论计算的含环向裂纹圆柱壳的鼓胀系数  $M$  随无量纲曲率  $\Lambda$  与厚度参数  $\delta = D/(Ca^2)$  的变化情况及其与经典近似公式(11.34)的对照见图 11.6。作者依据由 Reissner 型壳体理论的计算结果, 对经典近似公式(11.34)进行了修正, 提出了一个双参数含环向裂纹圆柱壳的鼓胀系数公式

$$M(\Lambda, \delta) = (1 + 0.097\Lambda^2)^{\frac{1}{2}} (1 + 0.25\delta^{0.1}) \quad (11.35)$$



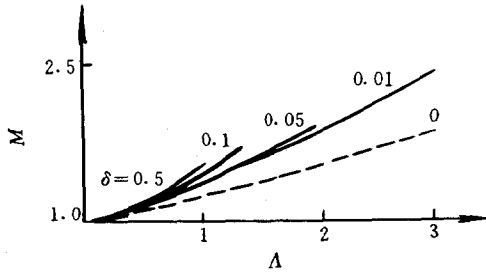


图 11.6 含环向裂纹圆柱壳的鼓胀系数

此公式的误差一般小于 5%。

## § 11.4 任意位向裂纹与孔边裂纹问题

### 1. 任意位向裂纹问题

考虑半径为  $R$ , 厚度为  $h$ , 含一条长  $2a$  的裂纹的圆柱壳, 裂纹方向与圆柱壳轴线夹角为  $\alpha$ 。将坐标原点设在裂纹尖端处,  $x$  轴沿裂纹延长线方向,  $y$  轴垂直于裂纹面。采用 Reissner 型壳体理论, 引入位移函数  $F$  和  $f$ , 应力函数  $\varphi$ , 由  $\xi = x/a, \eta = y/a$  将坐标无量纲化, 按照与 § 11.1 相同的推导方式, 可以得到

$$\begin{cases} \nabla^2 F - \Lambda^2 (\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi^2} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \eta^2} - \sin 2\alpha \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi \partial \eta}) = 0 \\ \nabla^4 \tilde{\varphi} + \Lambda^2 (\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}) = 0 \\ w = F - \delta \nabla^2 F + \text{Im} \Phi(\xi + i\eta) \\ \nabla^2 f - 4\mu^2 f = 4\mu^2 \text{Re} \Phi(\xi + i\eta) \end{cases} \quad (11.36)$$

式中  $\tilde{\varphi} = \varphi / \sqrt{DB}$ ,  $\Lambda^2 = \sqrt{12(1-\nu^2)} a^2 / (Rh)$ ,  $\delta = D / (Ca^2)$ ,  $4\mu^2 = 2 / [\delta(1-\nu)]$ ,  $D$  为弯曲刚度,  $B$  为抗拉压刚度,  $C$  为横向剪切刚度,  $\Phi(\xi + i\eta)$  为解析函数。

轴向裂纹与环向裂纹问题都是本节所研究的问题的特殊情

形。事实上,令基本方程(11.36)中  $\alpha=0^\circ$ ,就得到含轴向裂纹问题的基本方程(11.8);令  $\alpha=90^\circ$ ,就得到含环向裂纹问题的基本方程(11.32)。

基本方程(11.36)中位移与应力函数均可以展开成幂级数形式

$$(F, \tilde{\varphi} f, w, \Phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{2k} (F_k, \tilde{\varphi}_k, f_k, w_k, \Phi_k) \quad (11.37)$$

将式(11.37)代入方程(11.36),比较  $\Lambda^2$  的各阶项,就得到基本方程的各阶摄动方程。当  $k=0$  时,零阶摄动方程及裂纹面边界条件构成含裂纹 Reissner 型平板的定解问题,在裂纹尖端区域作特征展开,可以导出其位移应力场的渐近展开式。当  $k \geq 1$  时,第  $k$  阶摄动方程及裂纹面边界条件构成第  $k$  阶定解问题,可以导出第  $k$  阶摄动位移与应力场在裂纹尖端区域的渐近展开式,具体推导过程可以参考 § 11.1。

Reissner 型圆柱壳任意位向裂纹尖端应力应变场渐近展开式为发展分析含裂纹圆柱壳的局部-整体法及其它数值方法提供了力学基础。其中奇异元与常规元相结合的局部-整体法是一个普遍适用并精确有效的方法。为构造裂纹尖端奇异元位移模式,一般只须用到位移应力场的第 1 阶摄动解(当  $\Delta$  较小时)或第 2 阶摄动解(当  $\Delta$  较大时)。

## 2. 孔边裂纹问题

显然,对 Reissner 型圆柱壳任意位向的裂纹尖端位移应力场研究及在此基础上所发展的局部-整体法及其它数值方法,同样适合于研究圆柱壳的孔边裂纹问题。

考虑半径为  $R$ 、厚度为  $h$  的圆柱壳,壳内含一个半径为  $r$  的圆孔,孔边有两条长度为  $a$  的双边轴向裂纹。圆柱壳承受均匀内压  $q_0$ ,对于  $h/R$  等于  $1/5$  和  $1/10$  的情形,分别取  $r/R$  等于  $1/3$  和  $1/5$  进行计算。对鼓胀系数  $M$  的结果显示在图 11.7 和图 11.8 中。从图中看出,在  $h/R$  不变时,鼓胀系数随  $a/R$  的变化,先是下降,然后上升。这个规律与文献[108]的结果一致。

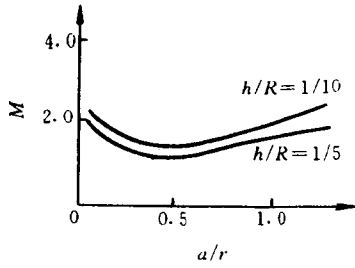


图 11.7 圆柱壳孔边双边轴向裂纹( $r/R = \frac{1}{3}$ )

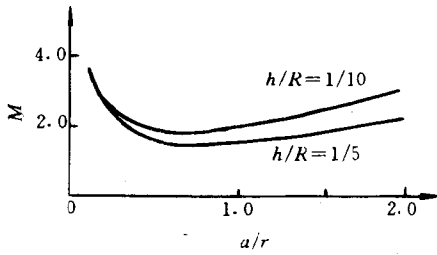


图 11.8 圆柱壳孔边双边轴向裂纹( $r/R = \frac{1}{5}$ )

## 第十二章 含表面裂纹板壳

我们已经较系统地研究了含穿透裂纹板壳问题。工程中,表面裂纹问题更为常见,然而由于其本质的三维性,它一直是力学与工程界的难题。柳春图、李英治等<sup>[51,63]</sup>成功地将对含穿透裂纹板壳的研究路线和方法推广于对表面裂纹的研究,获得了半椭圆表面裂纹尖端场的高阶渐近展开式,揭示了表面裂纹尖端附近的力学性质,同时在此基础上发展了含表面裂纹板壳分析的局部-整体法,仅用 828 个自由度,就获得了 Newman 等<sup>[56]</sup>近万自由度的计算精度,并通过光弹实验<sup>[68]</sup>验证了结果的正确性。本章将介绍这些研究工作。限于篇幅,没有介绍其他学者在这一研究领域的成果。

### § 12.1 基本方程的曲线坐标变换

#### 1. 适用于半椭圆表面裂纹的曲线坐标变换

裂纹尖端场是断裂分析的一个关键问题。长期以来,对表面裂纹尖端场的研究进展缓慢,其主要原因在于表面裂纹边界条件的表达式较为复杂。下面对半椭圆表面裂纹引入一种特殊的曲线坐标变换来简化边界条件。不难看出,这种曲线坐标变换的方法也易于推广到一般形状的表面裂纹问题。

研究对象如图 12.1 所示。设直角坐标系为  $Oxyz$ ,其中  $Oxy$  平面是自由表面,半椭圆裂纹片在  $Oxz$  平面内, $z$  轴垂直于自由表面并指向物体内部。

为了简化边界条件,引入一种特殊的曲线坐标变换:首先建立空间流动直角坐标系  $O'x'y'z'$ ,其中原点  $O'$  始终位于裂纹前缘线

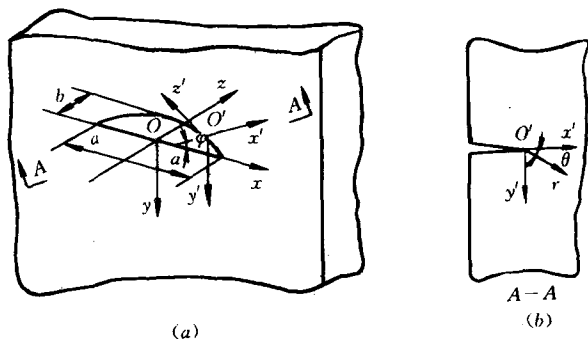


图 12.1 曲线坐标变换

(半椭圆)上,  $y'$  轴平行于  $y$  轴,  $x'$  轴沿椭圆外法线方向,  $z'$  轴沿椭圆切线方向。设  $x'$  轴与  $x$  轴的夹角为  $\varphi$ , 并在  $O'x'y'$  平面内引入极坐标  $r, \theta$ , 就构成了以  $r, \theta$  和  $\varphi$  为变量的空间曲线坐标系。

新旧坐标系之间的关系为

$$\begin{cases} x = \frac{a \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} + r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \\ z = \frac{b^2 \sin \varphi}{a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} + r \cos \theta \sin \varphi \end{cases} \quad (12.1)$$

式中  $a$  和  $b$  分别为椭圆的长半轴和短半轴,  $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$  为椭圆的离心率。

## 2. 曲线坐标系下的应力平衡方程

在直角坐标系下, 无体力作用时, 以应力表示的三维弹性力学平衡方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (12.2)$$

利用曲线坐标变换式(12.1),可以推出曲线坐标系下的应力平衡方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{r \partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{\Phi} \left[ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + (\sigma_r - \sigma_\varphi) \cos \theta - \sigma_{\theta r} \sin \theta \right] = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} + \frac{1}{\Phi} \left[ \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \sigma_{r\theta} \cos \theta + (\sigma_\varphi - \sigma_\theta) \sin \theta \right] = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{r \partial \theta} + \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{1}{\Phi} \left[ \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + 2(\sigma_{r\varphi} \cos \theta - \sigma_{\theta\varphi} \sin \theta) \right] = 0 \end{cases} \quad (12.3)$$

式中

$$\Phi = \frac{b^2}{a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} + r \cos \theta \quad (12.4)$$

### 3. 曲线坐标下的几何方程

按同样的方式,可以将直角坐标系下的几何方程变换到上述曲线坐标系中

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta = \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \epsilon_\varphi = \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \right) \\ \epsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \\ \epsilon_{r\varphi} = \frac{\partial u_r}{\Phi \partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{\Phi} \cos \theta \\ \epsilon_{\theta\varphi} = \frac{\partial u_\theta}{\Phi \partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{r \partial \theta} + \frac{u_\varphi}{\Phi} \sin \theta \end{cases} \quad (12.5)$$

### 4. 曲线坐标下的物理方程

新的曲线坐标系仍为正交坐标系,物理方程可以写为

$$\begin{cases} E\varepsilon_r = \sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_\varphi) \\ E\varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi) \\ E\varepsilon_\varphi = \sigma_\varphi - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \\ G\varepsilon_{r\theta} = \tau_{r\theta} \\ G\varepsilon_{r\varphi} = \tau_{r\varphi} \\ G\varepsilon_{\theta\varphi} = \tau_{\theta\varphi} \end{cases} \quad (12.6)$$

其中  $E$  是拉伸弹性模量,  $G$  是剪切弹性模量。

将几何方程(12.5)代入物理方程(12.6),可以得到曲线坐标系下应力与位移的关系

$$\sigma_r = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta \right) \right] + \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (12.7)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta \right) \right] + \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r} \right) \quad (12.8)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta \right) \right] + \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta \right) \quad (12.9)$$

$$\tau_{r\theta} = G \left( \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (12.10)$$

$$\tau_{r\varphi} = G \left( \frac{\partial u_r}{\Phi\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{\Phi} \cos\theta \right) \quad (12.11)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = G \left( \frac{\partial u_\theta}{\Phi\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{r\partial\theta} + \frac{u_\varphi}{\Phi} \sin\theta \right) \quad (12.12)$$

### 5. 曲线坐标下位移法的基本方程

将式(12.7)~(12.12)代入应力平衡方程(12.3),便得到曲线坐标下位移法的基本方程

$$2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial u_r}{r\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + (1-2\nu) \frac{\partial^2 u_r}{r^2 \partial \theta^2} +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathcal{F}u_\theta}{r \cdot \partial r \partial \theta} - (3 - 4\nu) \frac{\partial u_\theta}{r^2 \partial \theta} + \frac{1}{\Phi} \left[ \frac{\mathcal{F}u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + 2(1 - \nu) \frac{\partial u_r}{\partial r} \cos \theta - \right. \\
& \left. \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \sin \theta - (1 - 2\nu) \left( \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \sin \theta \right] + \\
& \frac{1}{\Phi^2} \left[ - (3 - 4\nu) \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \cos \theta - 2(1 - \nu) (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \cos \theta + \right. \\
& \left. (1 - 2\nu) \frac{\mathcal{F}u_r}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{1}{\Phi^3} \frac{(1 - 2\nu) 3b^2 e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{5/2}} \times \\
& \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \cos \theta \right) = 0 \tag{12.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathcal{F}u_r}{r \partial r \partial \theta} + (3 - 4\nu) \frac{\partial u_r}{r^2 \partial \theta} + (1 - 2\nu) \left( \frac{\mathcal{F}u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + \\
& 2(1 - \nu) \frac{\mathcal{F}u_\theta}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{\Phi} \left[ \frac{\mathcal{F}u_\varphi}{r \partial \theta \partial \varphi} + \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} \cos \theta - 2(1 - \nu) \left( \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{u_r}{r} \right) \sin \theta - \frac{u_\theta}{r} \cos \theta + (1 - 2\nu) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \cos \theta \right] + \\
& \frac{1}{\Phi^2} \left[ (1 - 2\nu) \frac{\mathcal{F}u_\theta}{\partial \varphi^2} + (3 - 4\nu) \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \sin \theta + \right. \\
& \left. 2(1 - \nu) (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \sin \theta \right] - \\
& \frac{1}{\Phi^3} \frac{(1 - 2\nu) 3b^2 e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{5/2}} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + u_\varphi \sin \theta \right) = 0 \tag{12.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathcal{F}u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\varphi}{r \partial r} + \frac{\mathcal{F}u_\varphi}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{\Phi} \left[ \frac{1}{1 - 2\nu} \left( \frac{\mathcal{F}u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\mathcal{F}u_\theta}{r \partial \theta \partial \varphi} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\partial u_r}{r \partial \varphi} \right) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u_\varphi}{r \partial \theta} \sin \theta \right] + \\
& \frac{1}{\Phi^2} \left[ \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} \frac{\mathcal{F}u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{3 - 4\nu}{1 - 2\nu} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \cos \theta - \right. \\
& \left. \frac{3 - 4\nu}{1 - 2\nu} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \sin \theta - u_\varphi \right] - \\
& \frac{1}{\Phi^3} \frac{6e^2 b^2 (1 - \nu) \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - 2\nu) a (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{5/2}} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \right. \\
& \left. u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \right) = 0 \tag{12.15}
\end{aligned}$$



## 6. 曲线坐标下裂纹面边界条件

在由式(12.1)所引进的曲线坐标下,裂纹面的边界条件简化为

$$\sigma_{\theta} = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \tau_{\theta\varphi} = 0 \quad \text{在 } \theta = \pm \pi \quad (12.16)$$

它为基本方程的特征函数展开创造了条件。

## § 12.2 基本方程的特征函数展开

### 1. 基本方程在裂纹前缘附近的渐近形式

在  $r \rightarrow 0$  的区域,对基本方程中的  $1/\Phi$  作如下渐近展开

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\frac{b^2}{a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} + r \cos \theta} = \frac{a}{b^2} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} [1 - r \cos \theta \frac{a}{b^2} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} + \dots] \quad (12.17)$$

对  $r$  无量纲化,令

$$\rho = \frac{r}{b^2/a} \quad (12.18)$$

并引入新记号

$$\Psi = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} \quad (12.19)$$

得到以下渐近展开式

$$\begin{cases} \frac{1}{\Phi} = \frac{a}{b^2} (\Psi - \rho \cos \theta \Psi^2 + \dots) \\ \frac{1}{\Phi^2} = \frac{a^2}{b^4} (\Psi^2 - 2\rho \cos \theta \Psi^3 + \dots) \\ \frac{1}{\Phi^3} = \frac{a^3}{b^6} (\Psi^3 - 3\rho \cos \theta \Psi^4 + \dots) \end{cases} \quad (12.20)$$

对各位移分量无量纲化

$$V_r = \frac{u_r}{b^2/a}, \quad V_{\theta} = \frac{u_{\theta}}{b^2/a}, \quad V_{\varphi} = \frac{u_{\varphi}}{b^2/a} \quad (12.21)$$

则基本方程(12.13)~(12.15)可以写为如下渐近形式

$$\begin{aligned}
 & 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial \rho^2} + \frac{\partial V_r}{\rho \partial \rho} - \frac{V_r}{\rho^2}\right) + (1-2\nu)\frac{\partial^2 V_r}{\rho^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\rho \partial \rho \partial \theta} - \\
 & (3-4\nu)\frac{\partial V_\theta}{\rho^2 \partial \theta} + (\Psi - \rho \cos \theta \Psi^2 + \dots)\left[\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \rho \partial \varphi} + 2(1-\nu) \cdot \right. \\
 & \left. \frac{\partial V_r}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial V_\theta}{\partial \rho} \sin \theta - (1-2\nu)\left(\frac{\partial V_r}{\rho \partial \theta} - \frac{V_\theta}{\rho}\right) \sin \theta\right] + (\Psi^2 - \\
 & 2\rho \cos \theta \Psi^3 + \dots)\left[-(3-4\nu)\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \cos \theta - 2(1-\nu)(V_r \cos \theta - \right. \\
 & \left. V_\theta \sin \theta) \cos \theta + (1-2\nu)\frac{\partial^2 V_r}{\partial \varphi^2}\right] - (\Psi^3 - 3\rho \cos \theta \Psi^4 + \dots) \cdot \\
 & \frac{3(1-2\nu)e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\Psi^{5/3}} - \left(\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - V_\varphi \cos \theta\right) = 0 \quad (12.22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 V_r}{\rho \partial \rho \partial \theta} + (3-4\nu)\frac{\partial V_r}{\rho^2 \partial \theta} + (1-2\nu)\left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \rho^2} + \frac{\partial V_\theta}{\rho \partial \rho} - \frac{V_\theta}{\rho^2}\right) + \\
 & 2(1-\nu)\frac{\partial^2 V_\theta}{\rho^2 \partial \theta^2} + (\Psi - \rho \cos \theta \Psi^2 + \dots)\left[\frac{\partial^2 V_\varphi}{\rho \partial \theta \partial \varphi} + \frac{\partial V_r}{\rho \partial \theta} \cos \theta - \right. \\
 & \left. 2(1-\nu)\left(\frac{\partial V_\theta}{\rho \partial \theta} + \frac{V_r}{\rho}\right) \sin \theta - \frac{V_\theta}{\rho} \cos \theta + (1-2\nu)\frac{\partial V_\theta}{\partial \rho} \cos \theta\right] + \\
 & (\Psi^2 - 2\rho \cos \theta \Psi^3 + \dots)\left[(1-2\nu)\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \varphi^2} + \right. \\
 & \left. (3-4\nu)\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \sin \theta + 2(1-\nu)(V_r \cos \theta - V_\theta \sin \theta) \sin \theta\right] - \\
 & (\Psi^3 - 3\rho \cos \theta \Psi^4 + \dots)\frac{3(1-2\nu)e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\Psi^{5/3}}\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} + \right. \\
 & \left. V_\varphi \sin \theta\right) = 0 \quad (12.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial V_\varphi}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\rho^2 \partial \theta^2} + (\Psi - \rho \cos \theta \Psi^2 + \dots)\left[\frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 V_r}{\rho \partial \rho \partial \varphi} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\partial^2 V_\theta}{\rho \partial \theta \partial \varphi} + \frac{\partial V_r}{\rho \partial \varphi}\right) + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial V_\varphi}{\rho \partial \theta} \sin \theta\right] + (\Psi^2 - 2\rho \cos \theta \Psi^3 + \dots) \cdot \\
 & \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{3-4\nu}{1-2\nu}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \cos \theta - \frac{3-4\nu}{1-2\nu}\frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \sin \theta - V_\varphi\right] - \\
 & (\Psi^3 - 3\rho \cos \theta \Psi^4 + \dots)\frac{6(1-\nu)e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1-2\nu)\Psi^{5/3}}\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \right.
 \end{aligned}$$

$$V_r \cos \theta - V_\theta \sin \theta = 0 \quad (12.24)$$

## 2. 位移函数的双重特征展开及特征值的确定

将无量纲位移  $V_r$ ,  $V_\theta$  和  $V_\varphi$  表达为双重特征展开级数

$$\left\{ \begin{aligned} V_r &= \sum_{\lambda} \sum_n \rho^{\lambda+n} a_n(\theta, \varphi; \lambda) = \sum_{\lambda} \rho^{\lambda} [a_0(\theta, \varphi; \lambda) + \\ &\quad \rho a_1(\theta, \varphi; \lambda) + \dots] \\ V_\theta &= \sum_{\lambda} \sum_n \rho^{\lambda+n} b_n(\theta, \varphi; \lambda) = \sum_{\lambda} \rho^{\lambda} [b_0(\theta, \varphi; \lambda) + \\ &\quad \rho b_1(\theta, \varphi; \lambda) + \dots] \\ V_\varphi &= \sum_{\lambda} \sum_n \rho^{\lambda+n} c_n(\theta, \varphi; \lambda) = \sum_{\lambda} \rho^{\lambda} [c_0(\theta, \varphi; \lambda) + \\ &\quad \rho c_1(\theta, \varphi; \lambda) + \dots] \end{aligned} \right. \quad (12.25)$$

将式(12.25)代入渐近形式的基本方程(12.22)~(12.24)及边界条件(12.16),按照  $\rho$  同次幂项重新排列并令  $\rho$  同次幂项系数之和为零,可以得到基本方程的各阶渐近方程和边界条件。

零阶近似方程为

$$\left\{ \begin{aligned} 2(1-\nu)(\lambda^2-1)a_0 + (1-2\nu) \frac{\partial^2 a_0}{\partial \theta^2} + (\lambda-3+4\nu) \frac{\partial b_0}{\partial \theta} &= 0 \\ (\lambda+3-4\nu) \frac{\partial a_0}{\partial \theta} + (1-2\nu)(\lambda^2-1)b_0 + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 b_0}{\partial \theta^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 c_0}{\partial \theta^2} + \lambda^2 c_0 &= 0 \end{aligned} \right. \quad (12.26)$$

零阶边界条件为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial b_0}{\partial \theta} + a_0 + \frac{\nu}{1-\nu} \lambda a_0 &= 0 \\ \frac{\partial a_0}{\partial \theta} + \lambda b_0 - b_0 &= 0 \quad \theta = \pm \pi \\ \frac{\partial c_0}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (12.27)$$

零阶近似方程是一组常微分方程,其解为

$$\begin{cases} a_0 = A_1^{(0)} \cos(\lambda + 1)\theta + A_2^{(0)} \sin(\lambda + 1)\theta + \\ \quad A_3^{(0)} \cos(\lambda - 1)\theta + A_4^{(0)} \sin(\lambda - 1)\theta \\ b_0 = -A_1^{(0)} \sin(\lambda + 1)\theta + A_2^{(0)} \cos(\lambda + 1)\theta + \\ \quad \frac{\lambda + 3 - 4\nu}{\lambda - 3 + 4\nu} [-A_3^{(0)} \sin(\lambda - 1)\theta + A_4^{(0)} \cos(\lambda - 1)\theta] \\ c_0 = B_1^{(0)} \cos \lambda \theta + B_2^{(0)} \sin \lambda \theta \end{cases} \quad (12.28)$$

式中  $A_i^{(0)}$  和  $B_j^{(0)}$  ( $i=1,2,3,4; j=1,2$ ) 为待定未知数,均为坐标  $\varphi$  的函数。

将式(12.28)代入边界条件(12.27),得到一组齐次方程。它有非零解的条件是方程组系数行列式等于零,由此可以求得特征值:

$$\lambda = \pm \frac{n}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.29)$$

根据应变能为有限的原则, $n$  为负值应该舍去。利用式(12.29),双重级数(12.25)可以归并为一个单重级数。

### 3. 位移函数的单重级数展开及其解答

设  $V_r, V_\theta$  和  $V_\varphi$  可以按单重级数展开

$$\begin{cases} V_r = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n/2} a_n(\theta, \varphi) \\ V_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n/2} b_n(\theta, \varphi) \\ V_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n/2} c_n(\theta, \varphi) \end{cases} \quad (12.30)$$

将此单重级数展开式代入基本方程(12.22)~(12.24)和边界条件(12.16),按  $\rho$  的同幂次排列并令同幂次项系数之和为零,得到各阶渐近方程和边界条件,然后由它们求得各阶问题的解答。

#### (1) 零阶问题及其解答 ( $n=0$ )

基本方程的零阶渐近方程为

$$\begin{cases} -2(1-\nu)a_0 + (1-2\nu)\frac{\partial^2 a_0}{\partial \theta^2} - (3-4\nu)\frac{\partial b_0}{\partial \theta} = 0 \\ (3-4\nu)\frac{\partial a_0}{\partial \theta} - (1-2\nu)b_0 + 2(1-\nu)\frac{\partial^2 b_0}{\partial \theta^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 c_0}{\partial \theta^2} = 0 \end{cases} \quad (12.31)$$

零阶问题的边界条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial b_0}{\partial \theta} + a_0 = 0 \\ \frac{\partial a_0}{\partial \theta} - b_0 = 0 \\ \frac{\partial c_0}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad \theta = \pm \pi \quad (12.32)$$

零阶近似方程(12.31)的通解为

$$\begin{cases} a_0 = A_1^{(0)}\cos\theta + A_2^{(0)}\sin\theta + (3-4\nu)(A_3^{(0)}\theta\sin\theta - A_4^{(0)}\theta\cos\theta) \\ b_0 = -(A_1^{(0)} + A_3^{(0)})\sin\theta + (A_2^{(0)} + A_4^{(0)})\cos\theta + \\ \quad (3-4\nu)(A_3^{(0)}\theta\cos\theta + A_4^{(0)}\theta\sin\theta) \\ c_0 = B_1^{(0)} + B_2^{(0)}\theta \end{cases} \quad (12.33)$$

将式(12.33)代入边界条件(12.32),可以得到通解中各待定函数( $\varphi$ 的函数)之间的关系,最后得到零阶问题的解答

$$\begin{cases} a_0 = A_1^{(0)}\cos\theta + A_2^{(0)}\sin\theta \\ b_0 = -A_1^{(0)}\sin\theta + A_2^{(0)}\cos\theta \\ c_0 = B_1^{(0)} \end{cases} \quad (12.34)$$

(2) 一阶问题解答( $n=1$ )

基本方程的一阶渐近方程为

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}(1-\nu)a_1 + (1-2\nu)\frac{\partial^2 a_1}{\partial \theta^2} + (-\frac{5}{2} + 4\nu)\frac{\partial b_1}{\partial \theta} = 0 \\ (\frac{7}{2} - 4\nu)\frac{\partial a_1}{\partial \theta} - \frac{3}{4}(1-2\nu)b_1 + 2(1-\nu)\frac{\partial^2 b_1}{\partial \theta^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 c_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{4}c_1 = 0 \end{cases} \quad (12.35)$$

一阶问题的边界条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial b_1}{\partial \theta} + \frac{2-\nu}{2(1-\nu)} a_1 = 0 \\ \frac{\partial a_1}{\partial \theta} - \frac{1}{2} b_1 = 0 \\ \frac{\partial c_1}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad \theta = \pm \pi \quad (12.36)$$

由方程(12.35)和边界条件(12.36),可以得到一阶问题的解答

$$\begin{cases} a_1 = A_1^{(1)} \left[ \cos \frac{3}{2} \theta - (5-8\nu) \cos \frac{\theta}{2} \right] + \\ \quad A_2^{(1)} \left[ \sin \frac{3}{2} \theta - \frac{1}{3} (5-8\nu) \sin \frac{\theta}{2} \right] \\ b_1 = -A^{(1)} \left[ \sin \frac{3}{2} \theta - (7-8\nu) \sin \frac{\theta}{2} \right] + \\ \quad A_2^{(1)} \left[ \cos \frac{3}{2} \theta - \frac{1}{3} (7-8\nu) \cos \frac{\theta}{2} \right] \\ c_1 = B_2^{(1)} \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (12.37)$$

此处的一阶近似解答与薛昌明等推导的三维无限体内含半无限平面裂纹问题的裂纹尖端场一致。裂纹前缘形状变化的影响将在高阶近似中体现。

(3) 二阶问题的解答( $n=2$ )

基本方程的二阶渐近方程为

$$\begin{cases} (1-2\nu) \frac{\partial^2 a_2}{\partial \theta^2} - 2(1-2\nu) \frac{\partial b_2}{\partial \theta} = \Psi(1-2\nu) \left( \frac{\partial a_0}{\partial \theta} - b_0 \right) \sin \theta \\ 4(1-\nu) \frac{\partial a_2}{\partial \theta} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 b_2}{\partial \theta^2} = -\Psi \left[ \frac{\partial c_0}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{\partial a_0}{\partial \theta} \cos \theta - \right. \\ \quad \left. 2(1-\nu) \left( a_0 + \frac{\partial c_0}{\partial \theta} \right) \sin \theta - b_0 \cos \theta \right] \\ \frac{\partial^2 c_2}{\partial \theta^2} + c_2 = -\Psi \left[ \frac{1}{1-2\nu} \left( \frac{\partial b_0}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{\partial a_0}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial c_0}{\partial \theta} \sin \theta \right] \end{cases} \quad (12.38)$$

二阶问题的边界条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-\nu)\left(\frac{\partial b_2}{\partial \theta} + a_2\right) + \nu a_2 + \nu \Psi\left(\frac{\partial x_0}{\partial \varphi} + a_0 \cos \theta - b_0 \sin \theta\right) = 0 \\ \frac{\partial a_2}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta} + \Psi\left(\frac{\partial x_0}{\partial \varphi} + c_0 \sin \theta\right) = 0 \end{array} \right. \quad \theta = \pm \pi \quad (12.39)$$

方程(12.38)与边界条件(12.39)出现了包括系数  $a_0, b_0$  和  $c_0$  的右端项。由零阶问题的解答,右端项为已知函数。将式(12.33)代入方程(12.38)右端,可以知道右端项均为零。方程(12.38)实质上仍是一个齐次常微分方程组。二阶问题的最终解答为

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = A_1^{(2)}(1-2\nu + \cos 2\theta) - \nu \Psi(B_1^{(0)'}) + A_1^{(0)} \\ b_2 = -A_1^{(2)} \sin 2\theta + A_4^{(2)} \\ c_2 = B_1^{(2)} \cos \theta - \Psi A_2^{(0)'}. \end{array} \right. \quad (12.40)$$

其中上标撇号表示对  $\varphi$  的导数(注意到,各待定未知数均是坐标  $\varphi$  的函数)

$$A_2^{(0)'} = \frac{dA_2^{(0)}}{d\varphi}, \quad B_1^{(0)'} = \frac{dB_1^{(0)}}{d\varphi} \quad (12.41)$$

#### (4) 三阶问题解答 ( $n=3$ )

基本方程的三阶渐近方程为

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}(1-\nu)a_3 + (1-2\nu)\frac{\partial^2 a_3}{\partial \theta^2} - \left(\frac{3}{2} - 4\nu\right)\frac{\partial b_3}{\partial \theta} &= -\Psi\left[\frac{1}{2}\frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + \right. \\ &\quad \left. (1-\nu)a_1 \cos \theta + \left(\frac{1}{2} - 2\nu\right)b_1 \sin \theta - (1-2\nu)\frac{\partial a_1}{\partial \theta} \sin \theta\right] \\ \left(\frac{9}{2} - 4\nu\right)\frac{\partial a_3}{\partial \theta} + \frac{5}{4}(1-2\nu)b_3 + 2(1-\nu)\frac{\partial^2 b_3}{\partial \theta^2} &= -\Psi\left[\frac{\partial c_1}{\partial \varphi} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial a_1}{\partial \theta} \cos \theta - 2(1-\nu)\left(a_1 + \frac{\partial b_1}{\partial \theta}\right) \sin \theta - \left(\frac{1}{2} + \nu\right)b_1 \cos \theta\right] \\ \frac{\partial^2 c_3}{\partial \theta^2} + \frac{9}{4}c_3 &= -\Psi\left[\frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{3\partial a_1}{2\partial \varphi} + \frac{\partial^2 b_1}{\partial \theta \partial \varphi}\right) + \frac{1}{2}c_1 \cos \theta - \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \sin \theta\right] \end{aligned} \quad (12.42)$$

三阶问题的边界条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \frac{1}{2}\nu)a_3 + (1 - \nu) \frac{\partial b_3}{\partial \theta} + \nu \Psi(\frac{\partial a_1}{\partial \varphi} + \\ a_1 \cos \theta - b_1 \sin \theta) = 0 \\ \frac{\partial a_3}{\partial \theta} + \frac{1}{2}b_3 = 0 \\ \frac{\partial a_3}{\partial \theta} + \Psi(b_1' + c_1 \sin \theta) = 0 \end{array} \right. \quad \theta = \pm \pi \quad (12.43)$$

方程(12.42)和边界条件(12.43)中出现了包括待定函数( $\varphi$ 的函数) $a_1, b_1$ 和 $c_1$ 的右端项,由一阶问题的解答,它们为已知函数,由此得到一个非齐次常微分方程组。它的解可以由相应齐次方程的通解加上一个特解来表示。经过较繁复的运算和归并,可以得到满足边界条件的三阶解答

$$\begin{aligned} a_3 &= A_1^{(3)}[\cos \frac{5}{2}\theta + (3 - 8\nu)\cos \frac{\theta}{2}] + A_2^{(3)}[\sin \frac{5}{2}\theta + \\ &\frac{1}{5}(3 - 8\nu)\sin \frac{\theta}{2}] + \Psi\{A_1^{(1)}[\frac{3 - 8\nu}{4}\cos \frac{3}{2}\theta - \\ &\frac{1}{12}(13 - 96\nu + 128\nu^2)\cos \frac{\theta}{2}] + A_2^{(1)}[\frac{3 - 8\nu}{12}\sin \frac{3}{2}\theta - \\ &\frac{1}{180}(107 + 96\nu - 128\nu^2)\sin \frac{\theta}{2}] - \frac{2}{15}(1 + 4\nu)B_2^{(1)}\sin \frac{\theta}{2}\} \\ b_3 &= -A_1^{(3)}[\sin \frac{5}{2}\theta - (9 - 8\nu)\sin \frac{\theta}{2}] + A_2^{(3)}[\cos \frac{5}{2}\theta - \\ &\frac{1}{5}(9 - 8\nu)\cos \frac{\theta}{2}] + \Psi\{-A_1^{(1)}[\frac{5 - 8\nu}{4}\sin \frac{3}{2}\theta + \\ &\frac{1}{12}(55 - 192\nu + 128\nu^2)\sin \frac{\theta}{2}] + \\ &A_2^{(1)}[\frac{5 - 8\nu}{12}\cos \frac{3}{2}\theta - \frac{1}{180}(79 - 192\nu + 128\nu^2)\cos \frac{\theta}{2}] - \\ &\frac{4}{15}(1 - 2\nu)B_2^{(1)}\cos \frac{\theta}{2}\} \\ c_3 &= B_2^{(3)}\sin \frac{3}{2}\theta + \Psi[-\frac{2}{3}(7 - 8\nu)A_1^{(1)'}\cos \frac{3}{2}\theta + \\ &2(A_1^{(1)'}\cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}A_2^{(1)'}\sin \frac{\theta}{2}) + \frac{1}{4}B_2^{(1)'}\sin \frac{\theta}{2}] \end{aligned} \quad (12.44)$$



(5) 四阶问题解答 ( $n=4$ )

同样地,可以写出基本方程的四阶和四阶以上的渐近方程及相应的裂纹面边界条件,并求得各高阶问题的解答,但运算更为繁复,下面给出四阶问题的解答

$$\begin{aligned}
 a_1 &= A_1^{(4)}[\cos 3\theta + \frac{1}{3}(1-4\nu)\cos\theta] + A_2^{(4)}[\sin 3\theta + (1-4\nu)\sin\theta] + [-\Psi^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{3\nu}{4}e^2\sin 2\varphi A_2^{(0)'} + \Psi \frac{\nu}{2}A_4^{(2)} + \Psi^2 \frac{\nu}{2}A_2^{(0)''}]\sin\theta + \{\Psi^{\frac{4}{3}}(A_1^{(0)'} - B_1^{(0)})\frac{1-\nu}{4}e^2\sin 2\varphi - \Psi[\frac{1+2\nu}{6}B_1^{(2)'} + \frac{1}{3}(1-\nu)(2+\nu)A_1^{(2)}] + \Psi^2[\frac{1}{6}(1+\nu)(2+\nu)A_1^{(0)} - \frac{1}{6}(1-\nu)A_1^{(0)''} + \frac{1}{6}(3+2\nu+\nu^2)A_1^{(0)'}] \}\cos\theta \\
 b_1 &= -A_1^{(4)}[\sin 3\theta - \frac{1}{3}(5-4\nu)\sin\theta] + A_2^{(4)}[\cos 3\theta - (5-4\nu)\cos\theta] - [-\Psi^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{3\nu}{4}e^2\sin 2\varphi A_2^{(0)'} + \Psi \frac{\nu}{2}A_4^{(2)} + \Psi^2 \frac{\nu}{2}A_2^{(0)''}]\cos\theta - \{\Psi^{\frac{4}{3}}(A_1^{(0)'} - B_1^{(0)})\frac{1+\nu}{4}e^2\sin 2\varphi - \Psi[\frac{1-2\nu}{6}B_1^{(2)'} + \frac{1}{3}(1-\nu)(2-\nu)A_1^{(2)}] + \Psi^2[\frac{1}{6}(1+\nu)(2-\nu)A_1^{(0)} - \frac{1+\nu}{6}A_1^{(0)''} + \frac{1}{6}(3+2\nu-\nu^2)B_1^{(0)'}] \}\sin\theta \\
 c_1 &= B_1^{(4)}\cos 2\theta + (-\Psi \frac{1}{2}A_4^{(2)'} + \Psi^2 \frac{1}{2}A_2^{(0)'})\sin 2\theta + \Psi^{\frac{4}{3}} \frac{3}{4}e^2\sin 2\varphi(B_1^{(0)'} + A_1^{(0)}) - \Psi(\frac{1}{4}B_1^{(2)} + \frac{1}{2}A_1^{(2)'}) - \Psi^2(-\frac{1}{4}B_1^{(0)} + \frac{1}{2}B_1^{(0)''} + \frac{3}{4}A_1^{(0)})
 \end{aligned}$$

(12.45)

### § 12.3 半椭圆表面裂纹前缘应力应变场

将上节求得的位移场的各阶展开式代入应力与位移的关系式(12.7)~(12.12),便求得应力,从而获得半椭圆表面裂纹前缘附近的应力应变场。前四阶应力场如下。

#### 1. 零阶渐近应力场( $n=0$ )

$$(\sigma_r)_0 = (\sigma_\theta)_0 = (\sigma_\varphi)_0 = (\tau_{r\theta})_0 = (\tau_{r\varphi})_0 = (\tau_{\theta\varphi})_0 = 0 \quad (12.46)$$

#### 2. 一阶渐近应力场( $n=1$ )

$$\begin{aligned} \rho^{\frac{1}{2}}(\sigma_r)_1 &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ A_1^{(1)} \left( \cos \frac{3}{2}\theta - 5\cos \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. A_2^{(1)} \left( \sin \frac{3}{2}\theta - \frac{5}{3}\sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ \rho^{\frac{1}{2}}(\sigma_\theta)_1 &= -\frac{E}{2(1+\nu)} \left[ A_1^{(1)} \left( \cos \frac{3}{2}\theta + 3\cos \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. A_2^{(1)} \left( \sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ \rho^{\frac{1}{2}}(\sigma_\varphi)_1 &= -\frac{4E\nu}{1+\nu} \left( A_1^{(1)} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} A_2^{(1)} \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ \rho^{\frac{1}{2}}(\tau_{r\theta})_1 &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ -A_1^{(1)} \left( \sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. A_2^{(1)} \left( \cos \frac{3}{2}\theta + \frac{1}{3}\cos \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ \rho^{\frac{1}{2}}(\tau_{r\varphi})_1 &= \frac{E}{4(1+\nu)} B_2^{(1)} \sin \frac{\theta}{2} \\ \rho^{\frac{1}{2}}(\tau_{\theta\varphi})_1 &= \frac{E}{4(1+\nu)} B_2^{(1)} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (12.47)$$

#### 3. 二阶渐近应力场( $n=2$ )

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_2 &= \frac{E}{1+\nu} A_1^{(2)} (1 + \cos 2\theta) \\ (\sigma_\theta)_2 &= \frac{E}{1+\nu} A_1^{(2)} (1 - \cos 2\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_\varphi)_2 &= \frac{2E\nu}{1+\nu}A_1^{(2)} + E\Psi(B_1^{(0)'} + A_1^{(0)}) \\
 (\tau_{r\theta})_2 &= -\frac{E}{1+\nu}A_1^{(2)}\sin 2\theta \\
 (\tau_{r\varphi})_2 &= \frac{E}{2(1+\nu)}[B_1^{(2)}\cos\theta + \Psi(A_1^{(0)'} - B_1^{(0)})\cos\theta] \\
 (\tau_{\theta\varphi})_2 &= -\frac{E}{2(1+\nu)}[B_1^{(2)}\sin\theta + \Psi(A_1^{(0)'} - B_1^{(0)})\sin\theta]
 \end{aligned}
 \tag{12.48}$$

#### 4. 三阶渐近应力场 ( $n=3$ )

$$\begin{aligned}
 \rho^{-\frac{1}{2}}(\sigma_r)_3 &= \frac{3E}{2(1+\nu)}[A_1^{(3)}(\cos \frac{5}{2}\theta + 3\cos \frac{\theta}{2}) + A_2^{(3)}(\sin \frac{5}{2}\theta + \\
 &\quad \frac{3}{5}\sin \frac{\theta}{2})] + \frac{E}{2(1+\nu)}\Psi\{\frac{1}{4}A_1^{(1)}[(9-16\nu)\cos \frac{3}{2}\theta - \\
 &\quad (13-16\nu)\cos \frac{\theta}{2}] + \frac{1}{12}A_2^{(1)}[(9-16\nu)\sin \frac{3}{2}\theta - \\
 &\quad \frac{1}{5}(107-112\nu)\sin \frac{\theta}{2}] - \frac{2}{5}B_2^{(1)'}\sin \frac{\theta}{2}\} \\
 \rho^{-\frac{1}{2}}(\sigma_\theta)_3 &= \frac{3E}{2(1+\nu)}[A_1^{(3)}(-\cos \frac{5}{2}\theta + 5\cos \frac{\theta}{2}) + \\
 &\quad A_2^{(3)}(-\sin \frac{5}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2})] - \frac{E(9-16\nu)}{8(1+\nu)}\Psi[A_1^{(1)} \cdot \\
 &\quad (\cos \frac{3}{2}\theta + 3\cos \frac{\theta}{2}) + \frac{1}{3}A_2^{(1)}(\sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2})] \\
 \rho^{-\frac{1}{2}}(\sigma_\varphi)_3 &= \frac{12E\nu}{1+\nu}(A_1^{(3)}\cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{5}A_2^{(3)}\sin \frac{\theta}{2}) + \\
 &\quad \frac{E}{1+\nu}\Psi\{A_1^{(3)}[(1+\nu)\cos \frac{3}{2}\theta - (5+2\nu - \\
 &\quad 16\nu^2)\cos \frac{\theta}{2}] + \frac{1}{3}A_2^{(1)}[(1+\nu)\sin \frac{3}{2}\theta + \frac{1}{5}(45 - \\
 &\quad 14\nu - 16\nu^2)\sin \frac{\theta}{2}] + \frac{1}{5}(5+4\nu)B_2^{(1)'}\sin \frac{\theta}{2}\} \\
 \rho^{-\frac{1}{2}}(\tau_{r\theta})_3 &= \frac{3E}{2(1+\nu)}[A_1^{(3)}(-\sin \frac{5}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2}) + A_2^{(3)} \\
 &\quad (\cos \frac{5}{2}\theta - \frac{1}{5}\cos \frac{\theta}{2})] + \frac{E}{2(1+\nu)}\Psi\{-\frac{1}{4}(7 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 16\nu A_1^{(1)}(\sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2}) + \frac{1}{12} A_2^{(1)}[(7 - 16\nu) \\
& \cos \frac{3}{2}\theta - \frac{1}{5}(31 - 16\nu)\cos \frac{\theta}{2}] - \frac{1}{5} B_2^{(1)} \cos \frac{\theta}{2} \} \\
\rho^{-\frac{1}{2}}(\tau_{r\varphi})_3 &= \frac{3E}{4(1+\nu)} B_2^{(3)} \sin \frac{3}{2}\theta + \frac{E}{2(1+\nu)} \Psi \{ -2A_1^{(1)\prime} [(3 - \\
& 4\nu)\cos \frac{3}{2}\theta + (1 - 4\nu)\cos \frac{\theta}{2}] + A_2^{(1)} [\sin \frac{3}{2}\theta - \\
& \frac{2}{3}(1 - 4\nu)\sin \frac{\theta}{2}] + B_2^{(1)} (\frac{3}{8} - \cos\theta)\sin \frac{\theta}{2} \} \\
\rho^{-\frac{1}{2}}(\tau_{\theta\varphi})_3 &= \frac{3E}{4(1+\nu)} B_2^{(3)} \cos \frac{3}{2}\theta + \frac{E}{2(1+\nu)} \Psi \{ 2(3 - 4\nu) \cdot \\
& A_1^{(1)\prime} (\sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2}) + A_2^{(1)\prime} [\cos \frac{3}{2}\theta - \frac{2}{3}(3 - \\
& 4\nu)\cos \frac{\theta}{2}] + B_2^{(1)} (\frac{1}{8} + 2\sin^2 \frac{\theta}{2})\cos \frac{\theta}{2} \} \quad (12.49)
\end{aligned}$$

#### 5. 四阶渐近应力场

$$\begin{aligned}
\rho^{-1}(\sigma_r)_4 &= \frac{E}{1+\nu} \{ 2A_1^{(4)}(\cos 3\theta + \frac{1}{3}\cos\theta) + \\
& 2A_2^{(4)}(\sin 3\theta + \sin\theta) + [-\frac{4}{3}(1-\nu)\Psi A_1^{(2)} - \\
& \frac{1}{3}\Psi B_1^{(2)\prime} + \frac{2}{3}(1+\nu)\Psi^2 A_1^{(0)} - \frac{1}{3}\Psi^2 A_1^{(0)\prime} + \frac{1}{3}(3 + \\
& 2\nu)\Psi^2 A_1^{(0)\prime} + \frac{1}{2}\Psi^{\frac{4}{3}}(A_1^{(0)\prime} - B_1^{(0)})e^2 \sin 2\varphi] \cos\theta \} \\
\rho^{-1}(\sigma_\theta)_4 &= -\frac{E}{1+\nu} [2A_1^{(4)}(\cos 3\theta - \cos\theta) + \\
& 2A_2^{(4)}(\sin 3\theta - 3\sin\theta)] \\
\rho^{-1}(\sigma_\varphi)_4 &= \frac{E}{1+\nu} \{ \frac{8\nu}{3} A_1^{(4)} \cos\theta + 8\nu A_2^{(4)} \sin\theta + \\
& \frac{3}{2} A_2^{(0)\prime} (1+\nu)\Psi^{\frac{4}{3}} e^2 \sin 2\varphi \sin\theta - (1-\nu)(A_4^{(2)} + \Psi A_2^{(0)\prime}) \cdot \\
& \Psi \sin\theta + [\frac{\nu}{2}\Psi^{\frac{4}{3}}(A_1^{(0)\prime} - B_1^{(0)})e^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{3}(3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\nu)\Psi B_1^{(2)'} + \frac{2}{3}(1-\nu)(3+\nu)\Psi A_1^{(2)} - \frac{1}{3}(1+\nu)(3+ \\
& \nu)\Psi^2 A_1^{(0)'} - \frac{\nu}{3}\Psi^2 A_1^{(0)''} - \frac{1}{3}(3+3\nu+\nu^2)\Psi^2 B_1^{(3)'}] \cos\theta\} \\
\rho^{-1}(\tau_{r\theta})_4 = & \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ -4A_1^{(4)}(\sin 3\theta - \frac{1}{3}\sin\theta) + \right. \\
& 4A_2^{(4)}(\cos 3\theta - \cos\theta) + [\frac{1}{3}\Psi B_1^{(2)'} + \frac{4}{3}(1-\nu) \cdot \\
& \Psi A_1^{(2)} - \frac{1}{2}\Psi^{\frac{4}{3}}(A_1^{(0)'} - B_1^{(0)})e^2 \sin 2\varphi - \frac{2}{3}(1+\nu) \cdot \\
& \Psi^2 A_1^{(0)} + \frac{1}{3}\Psi^2 A_1^{(0)''} - \frac{1}{3}(3+2\nu)\Psi^2 B_1^{(6)'}] \sin\theta \} \\
\rho^{-1}(\tau_{r\varphi})_4 = & \frac{E}{2(1+\nu)} [2B_1^{(4)}\cos 2\theta + \Psi(\Psi A_2^{(3)'} - A_4^{(2)'})\sin 2\theta + \\
& \frac{3}{2}(1+\nu)\Psi^{\frac{4}{3}}e^2 \sin 2\varphi (B_1^{(0)'} + A_1^{(0)}) + \Psi(\Psi B_1^{(0)} - \\
& B_1^{(2)}) (\frac{1}{2} + \cos^2\theta) + A_1^{(2)'}(\cos 2\theta - 2\nu) - \\
& (1+\nu)\Psi^2 B_1^{(0)''} - \Psi^2 A_1^{(0)'} (\frac{3}{2} + \nu + \cos^2\theta)] \\
\rho^{-1}(\tau_{\theta\varphi})_4 = & \frac{E}{2(1+\nu)} \{ \Psi(A_4^{(2)'} - \Psi A_2^{(0)'}) (1 - \cos 2\theta) + \\
& [-2B_1^{(4)} + \Psi(\frac{1}{2}B_1^{(2)} - A_1^{(2)'}) + \\
& \Psi^2 \frac{1}{2}(A_1^{(0)'} - B_1^{(0)})] \sin 2\theta \}
\end{aligned} \tag{12.50}$$

式(12.47)~(12.50)中

$$\rho = \frac{r}{b^2/a}, \quad \Psi = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \tag{12.51}$$

## § 12.4 含表面裂纹板的局部-整体分析

前几节已经获得了含半椭圆表面裂纹前缘附近位移应力应变

场包括 I、I、II 型的一般解。它们类似于平面断裂问题中 Williams 展开式的作用,为三维裂纹体的断裂分析提供了良好的基础。平面断裂分析中一整套成熟的分析方法,诸如能量法、边界配置法、奇异元分析等都可以移植到三维裂纹体的断裂分析中去。其中奇异元与常规元相结合的所谓局部-整体法,是对三维裂纹体的断裂分析适用范围较广并精确有效的方法。下面通过对含表面裂纹板的断裂分析来说明采用局部-整体法分析三维裂纹体的步骤与精度。

### 1. 计算对象与有限元网格

如图 12.2 所示,计算对象为一块长  $2L$ ,宽  $2W$ ,厚  $h$  的平板。板的一个表面中心处有一条长短半轴分别为  $a$  和  $b$  且垂直于板面的半椭圆表面裂纹。

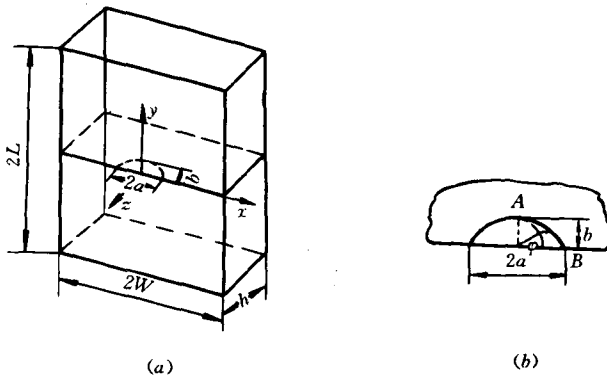


图 12.2 含表面裂纹平板

如果板的外载是对称或反对称的,可以取它的四分之一进行分析。所采用的有限元网格如图 12.3 所示:①沿裂纹前缘区域设置一个高阶三维奇异元,奇异元与流动坐标  $O'x'y'$  平面(参见图 12.1)相截,截痕是一个半径为  $R$  的圆,圆心即为裂纹前缘曲线与流动坐标平面的交点。②在奇异元邻近区域,设置十九个二十节点三维等参元。③在三维元以外的区域,设置十五个八节点等参厚壳元<sup>[32]</sup>。

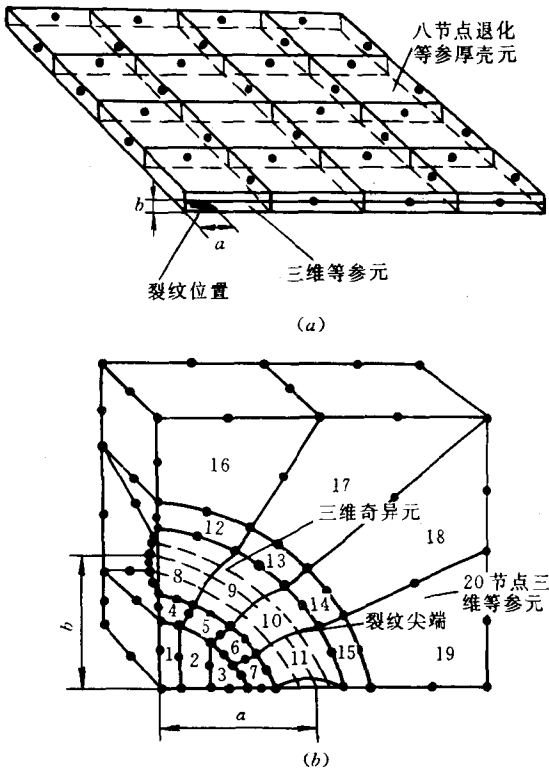


图 12.3 有限元网格划分

与常规大型三维有限元分析的网格相比,上述有限元网格的特点是:设置一个包围整个裂纹前缘区域的体积较大的三维奇异元,避免了此区域的稠密的网格;在离裂纹前缘较远的区域,用二维厚壳单元代替三维单元。这样作大幅度地降低了自由度。

## 2. 高阶奇异元的构造

利用前面所推导的裂纹前缘位移场展开式,可以构造表面裂纹前缘三维奇异元的位移模式。比二维裂纹问题复杂的是,表面裂纹前缘三维位移场展开式系数不是待定常数,而是坐标  $\varphi$  的待定函数,并且还包含对  $\varphi$  的导函数。这样就必须将各待定系数函数离

散化。为保证离散后的数值微分的准确性,需要采用合适的离散方式。计算中曾试用过富氏级数、台劳级数、拉格朗日插值、厄密特插值等等方式将其离散化,计算结果均不理想。其原因是因为以上插值方式虽能较好地逼近函数值,但数值微分却离真实状况较远。最后选用的三次样条函数插值<sup>[108~110,33]</sup>作为离散化的方法。由于样条插值能够正确地计算数值微分,结果精度很高。将 $\varphi$ 的变化区间 $[0, \pi/2]$ 离散为5个子区间,有6个节点,两端向外各延伸一点,则每个系数函数将对应于8个未知参数,奇异元的广义位移矢量由这些未知参数组成。三维奇异元的刚度矩阵形成的方法与§4.2和§8.2的方法相同,亦可参看文献[51,63],此处不再赘述。

### 3. 奇异元与常规元的连接与自由表面边界条件的处理

二维裂纹尖端奇异元的边界包括裂纹面及奇异元与常规元的连接界面,在§4.3与§8.3已经详细叙述了通过建立转换矩阵实现这两类单元的连接方式。三维裂纹前缘奇异元除了上述两类边界之外,还包含与板面相交的自由表面,增加了问题的复杂性。

在§4.3与§8.3为了实现奇异元与常规元的连接,利用位移协调条件,将常规元的位于奇异元边界的节点的位移参数用奇异元的广义位移参数表示。本节反过来,用奇异元边界上的常规元节点的位移参数来表示奇异元的广义位移参数。设奇异元的广义位移矢量为 $\{\delta\}$ ,位于奇异元边界上的全部常规元节点的位移矢量为 $\{0\}$ ,利用位移协调条件,可以得到

$$\{0\} = [\Omega]\{\delta\} \quad (12.52)$$

其中短阵 $[\Omega]$ 由前面导出的裂纹前缘场位移展开式确定。由取定的奇异元的位移模式,难以精确满足奇异元在板面的自由表面的边界条件,因此采用 $\sigma_\varphi$ ,  $\tau_{r\varphi}$ 和 $\tau_{\theta\varphi}$ 在这一表面加权积分为零的条件来近似满足。利用应力与位移的关系式,这个条件可以写为

$$\{0\} = [\Omega_o]\{\delta\} \quad (12.53)$$

式(12.52)与(12.53)可以合并成为

$$\begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\delta\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Omega] \\ [\Omega_o] \end{bmatrix} \{\delta\} \quad (12.54)$$



其中  $\begin{bmatrix} [\Omega] \\ [\Omega_s] \end{bmatrix}$  不是方阵,不能对其求逆解出  $\{\delta\}$ 。为此采用最小二乘技巧,将方程(12.54)两边同时左乘  $[[[\Omega]^T \quad [\Omega_s]^T]$ ,得到

$$[[[\Omega]^T \quad [\Omega_s]^T] \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = [[[\Omega]^T \quad [\Omega_s]^T] \begin{bmatrix} [\Omega] \\ [\Omega_s] \end{bmatrix} \{\hat{\delta}\} = [S] \{\delta\} \quad (12.55)$$

对  $[S]$  求逆便得到

$$\{\hat{\delta}\} = [S]^{-1} [[[\Omega]^T \quad [\Omega_s]^T] \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = [\hat{\Omega}] \{\delta\} \quad (12.56)$$

其中

$$[\hat{\Omega}] = [S]^{-1} [\Omega]^T \quad (12.57)$$

称为转换短阵。设由奇异元广义位移矢量表示的奇异元刚度矩阵为  $[\hat{K}]$ ,则利用转换矩阵(12.57),可以求得由公共边界的常规元节点位移参数表示的奇异元刚度矩阵  $[K]$ :

$$[K] = [\hat{\Omega}]^T [\hat{K}] [\Omega] \quad (12.58)$$

以后的分析可以按常规有限元法的步骤进行。在总刚度矩阵中,奇异元的广义位移矢量不出现,在求解后,它们容易由式(12.56)求得。

#### 4. 对称 I 型问题的结果及比较

##### (1) 结果比较

Newman 和 Raju<sup>[56]</sup>曾采用近万自由度的大型三维有限元计算研究了含半椭圆表面裂纹板受拉伸与弯曲载荷的问题(均为对称 I 型问题),并获得了较为普遍认可的结果。下面将局部-整体法的结果与 Newman 和 Raju 的大型三维有限元结果作一比较。

Newman 和 Raju<sup>[56]</sup>根据他们的三维有限元计算结果,将图 12.2 所示的含表面裂纹板的应力强度因子的结果表示为

$$K_1 = \sigma_r \sqrt{\frac{\pi b}{Q}} F_1 \left( \frac{b}{h}, \frac{b}{a}, \frac{a}{L}, \varphi \right) \quad (12.59)$$

式中  $F_i(\frac{b}{h}, \frac{b}{a}, \frac{a}{L}, \varphi)$  为无量纲应力强度因子。 $a, b$  分别为椭圆的长短半轴,  $\varphi$  的定义可参见图 12.2(b);  $h$  为板厚,  $2L$  为板长;  $i=T$  表示板受垂直于裂纹面的拉伸载荷,  $i=B$  表示受弯曲载荷;  $\sigma_i$  为板在远处(边界)的拉伸应力, 板受拉伸时沿板厚均匀分布, 弯曲时沿板厚线性分布, 公式(12.59)中是指它在板面的最大值;  $Q$  称为形状因子, 其近似公式为

$$Q = 1 + 1.46\left(\frac{b}{a}\right)^{1.65} \quad a > b \quad (12.60)$$

两种方法的计算结果比较见表 12.1 与图 12.4。可以看到, 除了靠近自由表面的角点区域外, 局部-整体法的结果与 Newman 和 Raju<sup>[56]</sup> 的三维有限元结果十分接近。在裂纹最深点  $A$  处( $\varphi = \pi/2$ ), 对于拉伸载荷, 两者结果相差 0.37%; 对于弯曲载荷, 两者结果相差 1.81%。

表 12.1 无量纲应力强度因子结果对照

$2\phi/\pi$	$F_T$ (拉伸情况)		$F_B$ (弯曲情况)	
	本 文	文献[56]	本 文	文献[56]
0	0.253	1.172	0.151	0.862
0.125	1.148	1.149	0.764	0.779
0.250	1.150	1.142	0.640	0.676
0.375	1.159	1.160	0.570	0.587
0.500	1.160	1.182	0.486	0.504
0.625	1.162	1.202	0.410	0.430
0.750	1.178	1.218	0.364	0.370
0.875	1.198	1.227	0.334	0.331
1.000	1.225	1.230	0.322	0.317

注: 表 12.1~12.4 的计算对象见图 12.2。由式(12.59), 无量纲应力强度因子  $F_i = K_I/(\sigma_i \sqrt{\pi b/Q})$ , 其中  $i=T$  表示拉伸载荷,  $i=B$  表示弯曲载荷。计算中各参数的取值为  $a/L=0.2, a/W=0.2, b/a=0.6, b/h=0.6, \nu=0.3$ 。

根据局部-整体法的计算结果, 在靠近自由表面的角点区域, 应力强度因子的数值急剧下降, 但并不等于零。根据 Newman 和

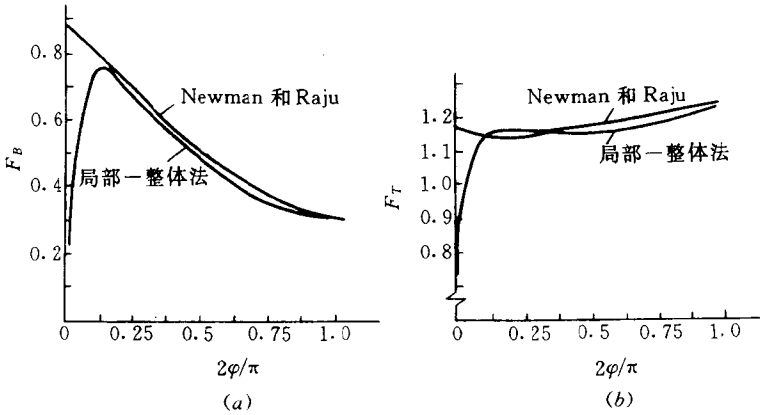


图 12.4 局部-整体法与 Newman 和 Raju 的结果比较

Raju 的结果,在趋近于自由表面角点时,应力强度因子之值平稳增长。这是由于我们在形成奇异元刚度矩阵时,通过式(12.53)以加权积分的方式考虑了自由表面应力为零的条件,而 Newman 和 Raju 采用常规位移法等参元,不能满足自由表面的应力边界条件,从而导致在角点区域两种方法所得结果的差别。

文献[111]用光弹试验测试了含表面裂纹板的应力强度因子。试验结果表明,在靠近自由表面区域有边界层效应。趋近边界层,应力强度因子急剧下降,但并不等于零。我们的实验<sup>[64]</sup>也证实了这一现象。理论分析结果与试验结果的对照见图 12.5。它说明,由局部-整体法所得的在角点区域的结果比 Newman 和 Raju 的结果更合理。

在图 12.6 中还汇集了我们和其他 14 位研究者的研究成果,图中纵坐标  $F_A^{(T)}$  表示远处拉伸情况下裂纹最深点  $A(\varphi = \pi/2)$  处的无量纲应力强度因子。

## (2) 板的宽度与厚度对应力强度因子的影响

就  $b/a=0.6$  的情况采用局部-整体法计算了板的有限宽度对应力强度因子的影响,计算结果列于表 12.2 与 12.3 中。有限厚度对应力强度因子的影响见表 12.4 与图 12.7。

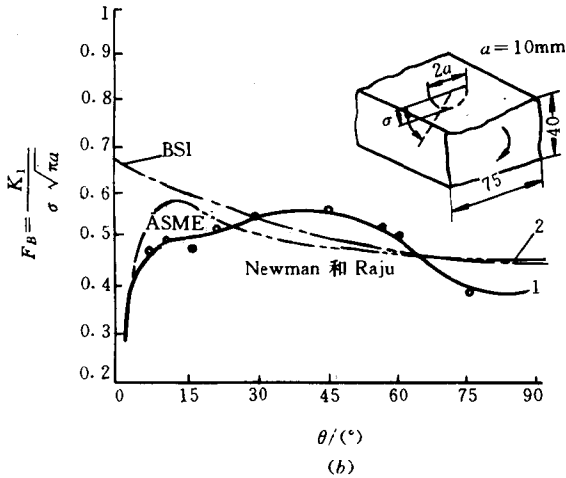
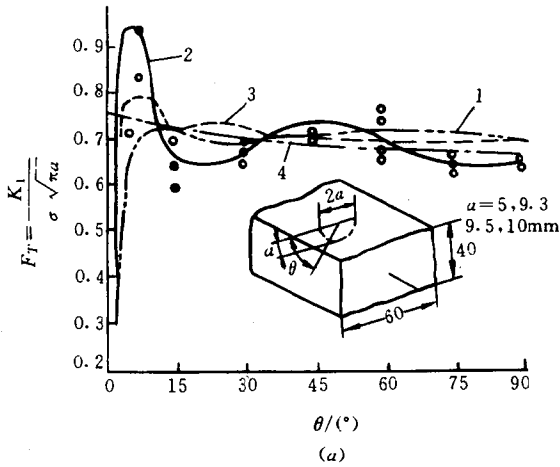


图 12.5 理论与实验结果比较

(a) 1—局部-整体法; 2—试验值; 3—Hartraft 和 sih; 4—Newman 和 Raju。

(b) 1—试验值; 2—局部-整体法。

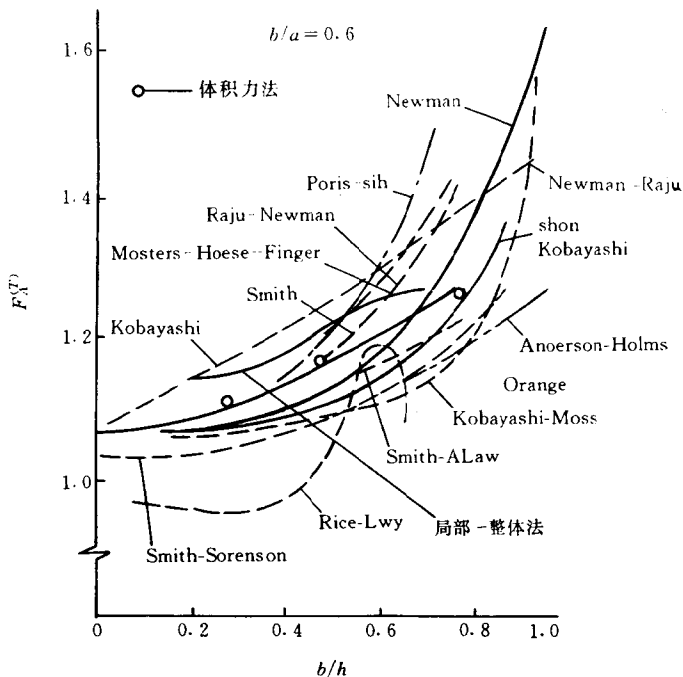


图 12.6 局部-整体法与现有的结果比较

表 12.2 拉伸载荷下无量纲应力强度因子随宽度变化

$2\phi/\pi$	$F_T$						
	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.10$	$\alpha=0.15$	$\alpha=0.20$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.30$	$\alpha=0.40$
0	0.247	0.248	0.250	0.253	0.265	0.283	0.304
0.125	1.114	1.124	1.134	1.148	1.184	1.244	1.344
0.250	1.118	1.126	1.136	1.150	1.188	1.240	1.324
0.375	1.130	1.138	1.148	1.159	1.198	1.254	1.332
0.500	1.130	1.138	1.148	1.160	1.196	1.244	1.320
0.625	1.122	1.132	1.150	1.162	1.192	1.236	1.312
0.750	1.132	1.144	1.152	1.178	1.192	1.248	1.322
0.875	1.156	1.168	1.168	1.198	1.210	1.264	1.340
1.000	1.199	1.206	1.215	1.225	1.255	1.304	1.383

注:  $F_T = K_I / (\sigma_1 \sqrt{\pi b/Q})$ ,  $\alpha = a/W$ ,  $a/L = 0.2$ ,  $b/h = 0.6$ ,  $b/a = 0.6$ ,  $\nu = 0.3$ .

表 12.3 弯曲载荷下无量纲应力强度因子随宽度变化

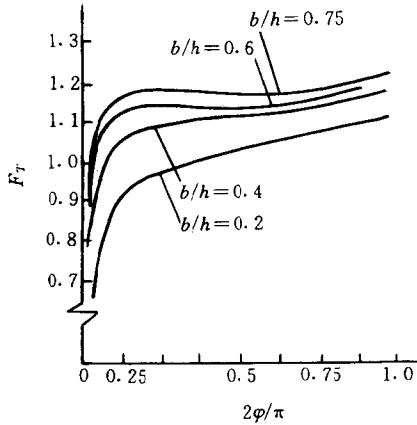
$2\phi/\pi$	$F_B$				
	$\alpha=0.15$	$\alpha=0.20$	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.30$	$\alpha=0.40$
0	0.151	0.151	0.160	0.171	0.187
0.125	0.760	0.764	0.788	0.810	0.840
0.250	0.620	0.640	0.662	0.682	0.740
0.375	0.562	0.570	0.604	0.640	0.684
0.500	0.474	0.486	0.508	0.548	0.592
0.625	0.400	0.410	0.430	0.468	0.524
0.750	0.356	0.364	0.386	0.428	0.483
0.875	0.330	0.334	0.360	0.400	0.448
1.000	0.320	0.322	0.342	0.377	0.427

注： $F_B=K_1/(\sigma_B \sqrt{\pi b/Q})$ ,  $\alpha=a/W$ ,  $a/L=0.2$ ,  $b/h=0.6$ ,  $b/a=0.6$ ,  $\nu=0.3$ 。

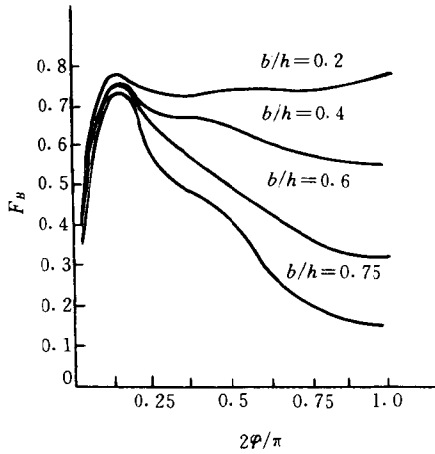
表 12.4 无量纲应力强度因子随厚度变化

$2\phi/\pi$	$F_T$ (拉伸情况)				$F_B$ (弯曲情况)			
	$\beta=0.2$	$\beta=0.4$	$\beta=0.6$	$\beta=0.75$	$\beta=0.2$	$\beta=0.4$	$\beta=0.6$	$\beta=0.75$
0	0.215	0.241	0.253	0.264	0.153	0.153	0.161	0.148
0.125	0.944	1.080	1.148	1.192	0.766	0.764	0.764	0.742
0.250	0.976	1.098	1.150	1.184	0.732	0.680	0.640	0.560
0.375	1.010	1.120	1.159	1.200	0.750	0.676	0.570	0.496
0.500	1.036	1.130	1.160	1.192	0.756	0.632	0.486	0.396
0.625	1.062	1.140	1.162	1.180	0.744	0.584	0.410	0.260
0.750	1.086	1.160	1.178	1.200	0.748	0.572	0.364	0.212
0.875	1.104	1.194	1.198	1.220	0.764	0.570	0.334	0.170
1.000	1.130	1.212	1.225	1.243	0.792	0.568	0.322	0.128

注： $\beta=b/h$ ,  $a/L=0.2$ ,  $a/W=0.2$ ,  $b/a=0.6$ ,  $\nu=0.3$ 。



(a)



(b)

图 12.7 无量纲应力强度因子随厚度变化

(a) 拉伸情况; (b) 弯曲情况。

### 5. II、III型复合问题

对于含表面裂纹板,关于受拉伸和弯曲载荷的对称 I 型问题的研究较多,例如收录在图 12.6 中的结果;但关于受面内剪切和扭矩作用的 II、III 型复合问题,研究结果很少,作者仅见到 Smith

和 Sorenson<sup>[112]</sup>采用交替法对面内剪力作用下含半椭圆表面裂纹无限板的研究。他们求得了这个复合型问题的Ⅱ、Ⅲ型应力强度因子。下面给出由局部-整体法对面内剪力和扭矩作用下含半椭圆表面裂纹有限尺寸板的研究,并在板的边长与裂纹长的比值很大时与交替法对无限板的计算结果作了比较。

计算对象仍见图 12.2,为了便于比较,将求得的应力强度因子按文献[112]的方式无量纲化

$$\begin{cases} \tilde{K}_2 = \frac{K_2}{\tau \sqrt{\pi b}/E(k)} \\ \tilde{K}_3 = \frac{K_3}{\tau \sqrt{\pi b}/E(k)} \end{cases} \quad (12.61)$$

其中  $\tau$  为板在远处(边界)的沿厚度的最大剪应力,众所周知,板受面内剪力时剪应力沿厚度均匀分布,在扭矩作用下剪应力沿板厚线性分布,并在板面达到最大值。 $E(k)$ 为第二类完全椭圆积分

$$k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (12.62)$$

为了与交替法<sup>[112]</sup>的结果比较,取板的长和宽  $2L=2W=200\text{mm}$  以模拟无限大板,板厚  $h=3\text{mm}$ ,裂纹长  $2a=2\text{mm}$ ,深  $b=0.6\text{mm}$ 。图 12.8 给出了由局部-整体法和交替法所计算的面内剪切载荷下的Ⅱ、Ⅲ型无量纲应力强度因子。可以看到,两种方法所计算的Ⅱ型无量纲应力强度因子  $\tilde{K}_2$  非常接近,但在自由边角点处( $\theta=90^\circ$ 处)相差很大。由局部-整体法, $\tilde{K}_2$  在角点附近下降;而由交替法<sup>[114]</sup>, $\tilde{K}_2$  上升。对于对称Ⅰ型问题,实验已经验证了Ⅰ型应力强度因子在角点附近下降的现象<sup>[64,111]</sup>,推测对于本问题,Ⅱ型应力强度因子也应当有下降的趋势。从图 12.8 还可以看到,两种方法所计算的Ⅲ型无量纲应力强度因子  $\tilde{K}_3$  有一定相对误差,最大相对误差为 11%。

图 12.9~12.11 是局部-整体法的计算结果。图 12.9 对于不同的板厚,给出了板的边界受均匀扭矩时,Ⅱ、Ⅲ型无量纲应力强



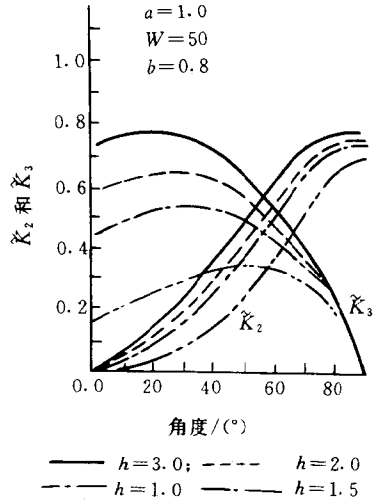
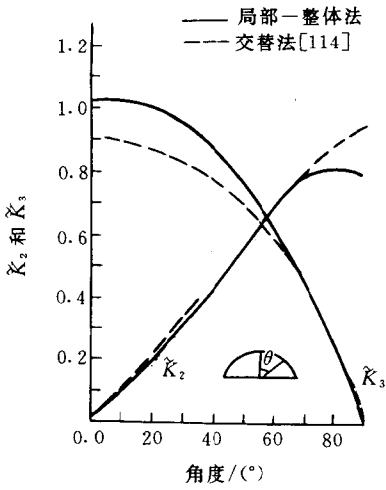


图 12.8 局部-整体法与交替法结果比较

图 12.9 不同厚度受扭板

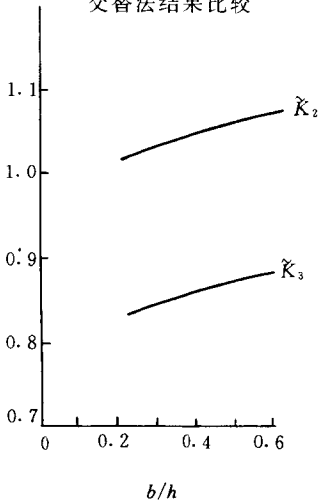


图 12.10 纯剪载荷下深厚比对  $K_2$  与  $K_3$  最大值的影响

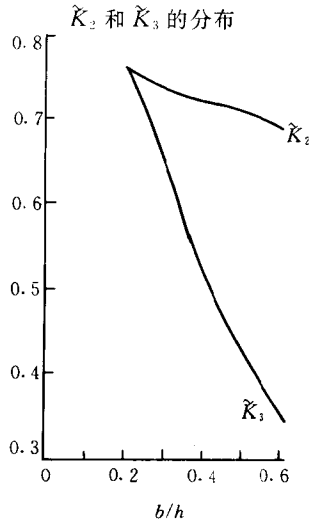


图 12.11 扭转载荷下深厚比对  $K_2$  与  $K_3$  最大值的影响

度因子  $\tilde{K}_2$  和  $\tilde{K}_3$  沿裂纹前缘的分布。可以看到,在扭矩作用下, $\tilde{K}_3$  的最大值一般不在裂纹最深处。板越薄, $\tilde{K}_3$  最大值的位置偏离最深点越远。这是由于扭矩作用下剪应力在板面最大,向内至中面逐渐变为零的缘故。图 12.10 与 12.11 分别显示了面内剪力和扭矩作用下裂纹深度与板厚的比值  $b/h$  对  $\tilde{K}_2$  和  $\tilde{K}_3$  最大值的影响。在面内剪切载荷下, $\tilde{K}_2$  与  $\tilde{K}_3$  的最大值随  $b/h$  的增加而增加;在扭矩作用下  $\tilde{K}_2$  与  $\tilde{K}_3$  的变化趋势刚好相反。

## § 12.5 表面裂纹的光弹实验

70 年代初,Smith<sup>[113]</sup>首先采用光弹法测定了含半椭圆表面裂纹板在纯弯载荷下裂纹最深点的应力强度因子,并研究了不同裂纹尺寸下,测点与裂纹尖端的距离对应力强度因子的影响。随后,Smith 又对含表面部分圆裂纹在拉伸载荷下裂纹最深点的应力强度因子进行了研究,同时考虑了厚度及宽度的影响。以后许多研究者继续进行表面裂纹的光弹实验研究,如 Phang 和 Ruiz<sup>[114]</sup>测定了含表面半圆形裂纹板在拉伸载荷下应力强度因子沿裂纹前缘的分布规律,初步讨论了裂纹与自由表面相交的角点附近的应力奇异性问题。Ruiz 和 Epstein<sup>[111]</sup>作了更细致的研究工作,测定了含表面半圆及部分圆裂纹板在拉伸及弯曲载荷下应力强度因子沿裂纹前缘的分布,并详细讨论了角点附近的应力奇异性问题。下面将介绍作者课题组对含半椭圆表面裂纹板在拉伸载荷下应力强度因子沿裂纹前缘分布的光弹实验研究<sup>[64]</sup>。

### 1. 应力强度因子的实验拟合

应力强度因子的实验拟合,根据切片条纹的情况可采用以下两种方法。

#### (1) Irwin 双参数法

Irwin<sup>[115]</sup>将裂纹尖端应力场取为如下形式

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta) - \sigma_{xx} \\ \sigma_y = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta) \\ \tau_{xy} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta \end{cases} \quad (12.63)$$

上式是受拉伸板裂纹尖端应力场主项的精确解添加常数  $\sigma_{xx}$  项, 所添加的项使应力场增加了一个自由度, 以便适应不同的边界条件。式中  $K_1$  是 I 型应力强度因子,  $r$  和  $\theta$  是以裂纹尖端为中心的极坐标。

从 Irwin 设定的应力场可以导出最大剪应力表达式

$$(2\tau_m)^2 = \frac{K_1^2}{2\pi r} \sin^2 \theta + \frac{2K_1 \sigma_{xx}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \theta \sin \frac{3}{2}\theta + \sigma_{xx}^2 \quad (12.64)$$

Irwin 观察到等差裂纹图上离裂纹尖端最远的  $m$  点 (图 12.12) 有关系式

$$\frac{\partial \tau_m}{\partial \theta_m} = 0 \quad (12.65)$$

从而导出应力强度因子公式如下

$$K_1 = \frac{2\tau_m \sqrt{2\pi r_m}}{\sin \theta_m} \left[ 1 + \left( \frac{2}{3 \operatorname{tg} \theta_m} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{2 \operatorname{tg} 3\theta_m / 2}{3 \operatorname{tg} \theta_m} \right) \quad (12.66)$$

Irwin 双参数法在实际运用时对  $\theta_m$  有一定的限制, 当  $73^\circ < \theta_m < 134^\circ$  时精确度可以达到 2%。而当  $\theta_m$  接近上下限时, 式 (12.66) 对  $\theta_m$  很灵敏, 测量上的较小误差将导致结果的较大误差。

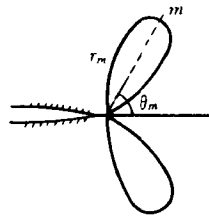


图 12.12 裂纹尖端等差条纹图

## (2) Taylor 级数法

Smith<sup>[113]</sup>沿  $\theta = 90^\circ$  线上测取参数, 将剪应力取为如下级数形

式

$$\tau_{\max} = \frac{K_1}{\sqrt{8\pi r}} + \sum_{n=0}^N B_n r^n \quad (12.67)$$

其中级数所取的项数  $N$  根据  $K$  场内有效数据个数而定。用幂级数拟合不同的边界条件较之 Irwin 用双参数拟合的效果要好,因而 Taylor 级数法的精度要高。

## 2. 模型加工

表面裂纹实验中的关键技术之一是如何在试件上得到所需要的表面裂纹。它要求裂纹成形准确,尖端钝性影响小。较流行的方法是热压法<sup>[111,113,114]</sup>,即在材料的冻结温度下用机械方法将已磨成所需形状的尖锐刀片压入模型中而形成表面裂纹。这个方法的缺点是在加工过程中材料容易起裂,使裂纹形状难以保证,另一个问题是加工初应力大,即使退火也不容易完全消除。

本实验采用预埋法。在浇铸过程中将裂纹预置于试件内,能较好地克服热压法的缺点。具体制作方法如下:模具的上下两表面采用玻璃板,周边采用钢框架,先在其中的一块玻璃上加工出一条深数毫米,长度略小于所需裂纹长度的槽,然后用厚度约 0.2mm 的钢片剪成半椭圆裂纹形状,其下端留出一与槽等长、深度略小于槽深的柄,上端半椭圆部分打磨尖锐(图 12.13)。将此钢片插入玻璃板的槽中并粘牢,在模具内腔涂上硅酮橡胶脱模剂并装配好,模具的准备工作即告完成。

模型采用 Photoelastic Inc 公司的 PLM-4 型环氧树脂及相应的固化剂,其固化温度为 127°C,将按比例配置的树脂和固化剂在高温下搅拌均匀,并将模具预热后即可开始浇铸工作,浇铸中要注意树脂的流入方向与模具上预先粘上的薄钢片平面平行,浇铸完毕后要仔细地排除气泡,特别是预埋钢片附近的气泡,只有所有的气泡都排除后才能进行第一次固化处理,脱模后再进行第二次固化处理。

考虑到试件的厚度及对初应力的要求,两次固化的温度梯度都取得较小,其固化过程中的温度曲线分别如图 12.14 和 12.15

所示。经过这样处理的试件,在偏振光路中看不到初应力条纹,得到的表面裂纹成形准确,其尖端曲率半径小于  $0.2\text{mm}$ ,完全杜绝了裂纹前缘扩展的可能性。



图 12.13 预埋钢片形状

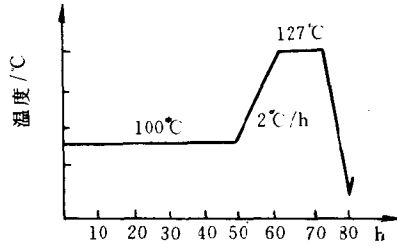


图 12.14 第一次固化的温度曲线

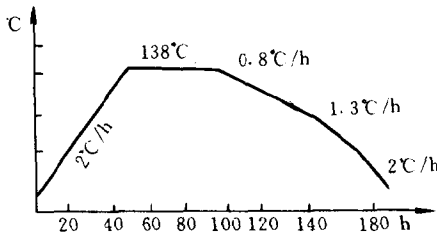


图 12.15 第二次固化的温度曲线

### 3. 条纹倍增

常用的条纹倍增法是利用光线的多次反射及透射来倍增条纹<sup>[116]</sup>,这种方法的缺点是光强衰减较多,面积很小的切片用这种方法有一定的困难。为了解决这个问题,在参考了贴片光弹法原理后尝试了以下两种改进方法。

① 光路图如图 12.16 所示,在两块四分之一波片之间放置两块全反射镜,将切片紧贴于其中一片全反射镜上,要求全反射镜上的入射光和反射光之间的夹角尽可能地小(小于  $5^\circ$ )。偏振光两次通过切片,条纹得以二倍倍增。这种光路对光强无衰减作用,转动

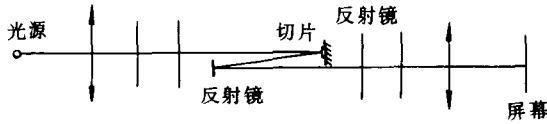


图 12.16 条纹倍增光路图

检偏镜可以得到明场和暗场的条纹图。

② 光路图如图 12.17 所示, 只用一片偏振镜和四分之一波片, 四分之一波片的快轴与偏振轴成  $45^\circ$  放置。此光路图原理如下 (参见图 12.18 和 12.19):

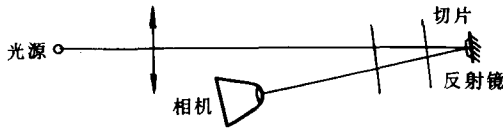


图 12.17 条纹倍增光路图

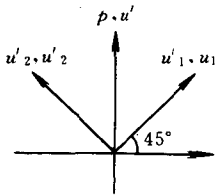


图 12.18 到达全反射镜的偏振光分解图

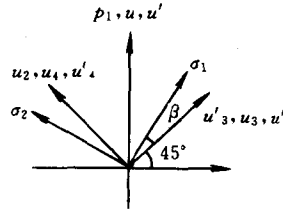


图 12.19 经过四分之一波片后的偏振光分解图

设  $u'_1$  和  $u'_2$  为到达全反射镜的偏振光, 则经反射镜反射后再次经过四分之一波片后的偏振光  $u''_1$  和  $u''_2$  分别为

$$\begin{aligned}
 u''_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}}{2} a \sin \omega t \\
 u''_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} a \sin \omega t
 \end{aligned}$$

其合成光为

$$u' = (u''_1 + u''_2)\cos 45^\circ = 0$$

完全消光而得到暗场。这种光路不能得到明场。

放入切片后,偏振光两次通过切片,由切片出来的偏振光为

$$u''_{\sigma_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}a\cos(\omega t - \beta + 2\delta)$$

$$u''_{\sigma_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a\sin(\omega t - \beta)$$

经过四分之一波片后的偏振光为

$$u'_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}a[\sin(\omega t - \beta + 2\delta)\cos\beta + \cos(\omega t - \beta)\sin\beta]$$

$$u'_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}a[\sin(\omega t - \beta)\cos\beta + \cos(\omega t - \beta + 2\delta)\sin\beta]$$

合成偏振光为

$$u' = (u'_3 + u'_4)\cos 45^\circ = -a\sin\delta\cos(\omega t - 2\beta + \delta)$$

光强为

$$I = K(a\sin\delta)^2$$

消光条件为

$$2\pi\Delta/\lambda = N\pi, \quad \Delta = N\lambda/2 \quad (\delta = 2\pi\Delta/\lambda)$$

条纹得到二倍倍增,对光强无衰减作用。这种方法调整简单,但只能得到暗场。

#### 4. 实验结果及对照

下面将光弹实验结果<sup>[64]</sup>与局部-整体法的结果<sup>[63]</sup>作一比较。为了比较的方便,将由实验测得的应力强度因子也无量纲化

$$\tilde{K}_I = K_I/(\sigma_T \sqrt{\pi b/Q})$$

其中  $\tilde{K}_I$  为 I 型无量纲应力强度因子,  $\sigma_T$  为板在边界的拉伸应力,

$a$  与  $b$  分别为半椭圆裂纹的长短半轴,  $Q$  为椭圆形状因子, 其近似公式为

$$Q = 1 + 1.46(b/a)^{1.65}$$

实验测试与理论计算的模型见图 12.2。在  $a/L=0.222, b/a=0.6$  的条件下, 由光弹法测试了三种相对深度的裂纹(即  $b/h=0.2$  的浅裂纹,  $b/h=0.4$  的中等深度裂纹和  $b/h=0.6$  的深裂纹)。裂纹前缘无量纲应力强度因子  $\tilde{K}_I$  的光弹实验结果<sup>[64]</sup>与局部-整体法的计算结果<sup>[63]</sup>列于表 12.5~12.7 中, 也由图 12.20 作了对照。图 12.21 给出了表 12.6 所测试的试样的暗场条纹图。可以看到, 理论计算与实验测试的结果变化规律一致, 结果也很接近, 其中浅裂纹( $b/h=0.2$ )的计算结果稍大于实验结果, 而深裂纹( $b/h=0.6$ )的计算结果则稍小于实验结果。由局部-整体法<sup>[63]</sup>的理论计算显示在靠近角点的地方( $\varphi=10^\circ\sim 20^\circ$ ), 应力强度因子出现一个峰值。对深裂纹的实验也观测到了这一现象, 但是对中等深度的裂纹则没有观测到这个现象, 而浅裂纹在  $\varphi<30^\circ$  的区域内未得到实验数据。由局部-整体法的理论计算表明在角点附近, 应力强度因子急剧下降。三组试件虽然均未得到角点( $\varphi=0^\circ$ )上的实验结果, 但是可以验证这个变化规律。

表 12.5 浅裂纹( $b/h=0.2$ )的无量纲应力强度因子  $\tilde{K}_I$

切片位置 $\varphi$	切片厚度/mm	实验 $\tilde{K}_I$ 值	计算 $\tilde{K}_I$ 值	相对误差(%)
0°	1.7		0.7607	
10°	1.3		0.8984	
30°	1.05	0.828	0.8635	4.28
45°	1.4	0.898	0.9164	2.05
60°	1.35	0.915	1.019	11.4
90°	1.2	1.1	1.142	3.81

注: 表 12.5~12.7 的计算与实验模型均见图 12.2。本表中  $W=30\text{mm}, L=120\text{mm}, b=4\text{mm}, h=20\text{mm}, a=6.67\text{mm}$ , 条纹值  $f=3.644\text{N/cm}\cdot f$ 。



表 12.6 中等深度裂纹( $b/h=0.4$ )的无量纲应力  
强度因子  $\tilde{K}_I$

切片位置 $\varphi$	切片厚度/mm	实验 $K_I$ 值	计算 $K_I$ 值	相对误差(%)
5°	1.3	0.894	0.864	3.35
10°	1.9	0.974	1.024	5.13
30°	1.65	1.02	0.9989	2.07
45°	1.8	1.131	1.048	7.34
60°	1.35	1.173	1.077	8.18
90°	1.8	1.132	1.224	8.13

注:  $W=60\text{mm}$ ,  $L=120\text{mm}$ ,  $h=20\text{mm}$ ,  $b=8\text{mm}$ ,  $a=13.33\text{mm}$ , 条纹值  $f=3.4653\text{N/cm}\cdot f_0$ 。

表 12.7 深裂纹( $b/h=0.6$ )的无量纲应力强度因子  $\tilde{K}_I$

切片位置 $\varphi$	切片厚度/mm	实验 $K_I$ 值	计算 $K_I$ 值	相对误差(%)
5°	1.15	1.062	1.014	1.19
10°	1.7	1.15	1.148	0.13
30°	1.5	1.108	1.068	3.6
45°	1.8	1.18	1.102	6.61
60°	1.65	1.17	1.1065	5.43
90°	1.6	1.35	1.237	8.37

注:  $W=45\text{mm}$ ,  $L=120\text{mm}$ ,  $h=10\text{mm}$ ,  $b=6\text{mm}$ ,  $a=10\text{mm}$ , 材料条纹值  $f=3.4653\text{N/cm}\cdot f_0$ 。

## 5. 几点结论

① 光弹试样的表面裂纹的制取采用了“预埋法”,解决了加工过程中材料容易起裂,使裂纹形状不准确的问题及出现加工残余应力问题。得到的裂纹形状准确,尖端的尖锐程度较好,尖端钝性影响较小,在偏振光路中看不到试件的初应力条纹。

② 采用了两种新的条纹倍增方法,倍增后的光强几乎不衰减,条纹清晰易读,简化了实验过程,并有益于提高实验精度,减小

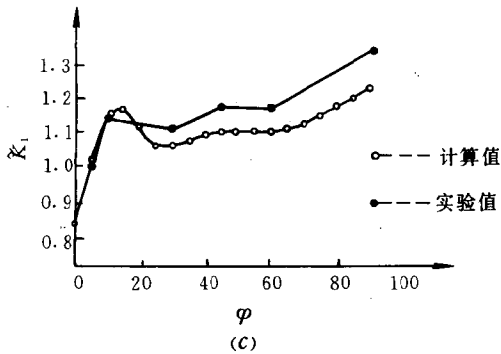
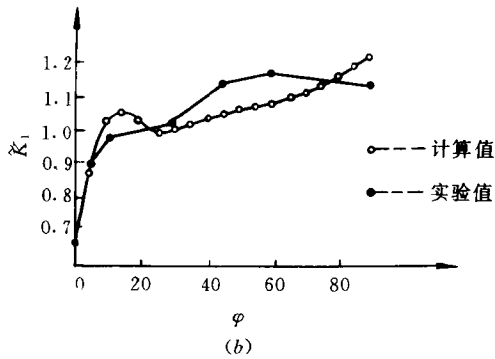
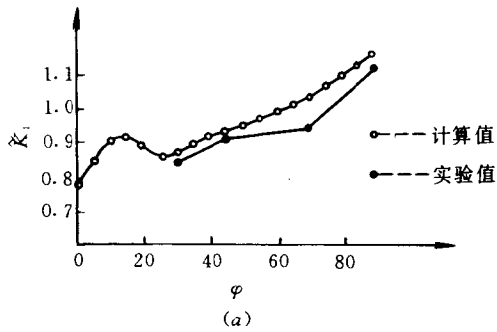


图 12.20

(a) 浅裂纹光弹结果与计算结果的比较; (b) 中等深度裂纹光弹结果与计算结果的比较; (c) 深裂纹光弹结果与计算结果的比较。

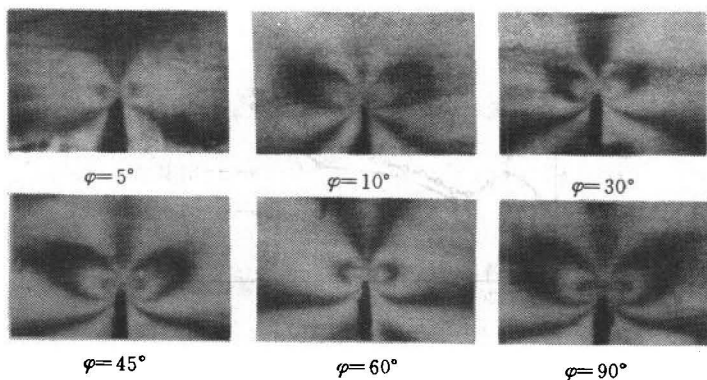


图 12.21 试样的暗场条纹图

操作误差。

③ 总体说来,光弹实验结果与局部-整体法的理论结果符合很好。根据局部-整体法,邻近裂纹前缘与自由表面相交的角点区域,应力强度因子的数值急剧下降。光弹实验证实了这个变化规律。它表明在角点邻域,局部-整体法的解答比 Newman 和 Raiu<sup>[56]</sup> 的三维有限元分析结果更合理。

### 参 考 文 献

- 1 Irwin G R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J Appl Mech*, 1957, 24: 361-364
- 2 Griffith A A. The phenomena of flow and rupture in solids. *Phil Trans Roy Soc*, 1920, A221: 163
- 3 中国航空研究院. 应力强度因子手册, 北京: 科学出版社, 1981
- 4 Tada H, Paris P C, Irwin G R. *The stress analysis of cracks handbook*, Hellertown, Pa: Del Reseach Corp, 1973
- 5 Sih G C. *Handbook of stress intensity factors for researchers and engineers*. Bethlehem, Pa: Lehigh University, 1973
- 6 Murakami Y. *Stress intensity factors handbook*. Beijing: World Publishing Corporation, 1989
- 7 中国航空研究院. 应力强度因子手册增订版. 北京: 科学出版社, 1993

- 8 柳春图,李英治. 平板弯曲断裂问题的研究进展. 力学进展,1982,12(4):346~359
- 9 柳春图,李英治. 含裂纹板壳及三维裂纹体断裂问题的研究进展. 力学进展,1986,16(2):185-193
- 10 Timoshenko S and Woinowsky-Kriege S. Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill Book Company,1959
- 11 Williams M L. The bending stress distribution at the base of a stationary crack. J Appl Mech,1961,28:78-82
- 12 Sih G C,Paris P C,Erdogan F. Crack tip, stress-intensity factors for plane extension and plate bending problems. J Appl Mech,1962,29:306-310
- 13 穆斯海里什维里,数学弹性力学的几个基本问题. 赵惠元译. 北京:科学出版社,1958
- 14 Savin G N. Stress concentration around hole. New York:Pergamon,1961
- 15 蒋持平. 关于嵌入了不同材料的平面问题. 湖南大学学报,1986,3(1):83-90
- 16 刘又文,蒋持平. 在集中力和集中力偶作用下不同弹性材料圆形界面裂纹问题. 应用数学和力学,1987,8(3):267-276
- 17 蒋持平,刘又文. 关于集中载荷作用下不同材料界面的共线裂纹问题. 应用数学和力学,1988,9(2):155-164
- 18 Jiang C P,Zou Z Z,Wang D and Liu Y W. A discussion about a class of stress intensity factors and its verification. Int J Fracture,1991,49(2):141-157
- 19 Jjang C P and Liu C T. Stress distribution around a rigid line in dissimilar media. Engng Fracture Mech,1992,42:27-32
- 20 蒋持平,柳春图. 集中弯矩作用下圆弧裂纹的弯曲问题. 固体力学学报,1995,16(3):274-278
- 21 蒋持平. 两共线半无限裂纹板的弯曲问题. 北京航空航天大学学报,1996,22(1):44-48
- 22 Reissner E. On bending of elastic plates. Quarterly Appl Math,1947,5:55-68
- 23 Knowles J K and Wang N M. On the bending of an elastic plate containing a crack. J Math Phy,1960,39:223-236
- 24 Hartranft R J and Sih G C. Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks. J Math Phy,1968,47:276-291
- 25 Murthy M V V,Raju K N and Viswanath S. On the bending stress distribution at the tip of a stationary crack from Reissner's theory. Int J Fracture,1981,17(6):537-552
- 26 柳春图. Reissner 型中厚板在弯曲问题中裂纹尖端附近应力应变场. 中国科学院力学研究所工作报告,1980
- 27 柳春图. 承受弯曲的板在裂纹顶端附近的应力和变形. 固体力学学报,1983,4

(3):441-448

- 28 Sih G C. A review of the three-dimensional stress problem for a cracked plate. *Int J Fracture Mech.* 1971, 7(1):39-67
- 29 中国科学院力学研究所板壳组. 夹层板壳的弯曲、稳定和振动. 北京: 科学出版社, 1977, 259
- 30 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1981, 585
- 31 钱伟长. 变分法与有限元. 北京: 科学出版社, 1981
- 32 Zienkiewicz O C. *Finite Element method in engineering science.* London: McGraw-Hill, 1971
- 33 Jiang C P. Finite strip analysis for rectangular plates considering shear deformation. *Engineering Analysis*, 1984, 1(4):206-210
- 34 Wilson W K and Thompson D G. On the finite element method for calculating stress intensity factors for cracked plates in bending. *Engng Fracture Mech.* 1971, 3:2
- 35 Barsoum R S. A degenerate solid element for linear fracture analysis of plate bending and general shells. *Int J Num Meth Engng*, 1976, 10:551-564
- 36 Yagawa G. Finite element analysis of stress intensity factors for plate extension and plate bending problems. *Int J Num Meth Engng*, 1979, 14:5
- 37 Williams M L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J Appl Mech.* 1957, 24:109-114
- 38 Wilson W K. Finite element method for elastic bodies containing cracks. In: Sih G C, eds. *Mechanics of Fracture I.* Leyden: Noordhoff International, 1973
- 39 Holston A Jr. A mixed mode crack tip finite element. *Int J Fracture*, 1976. 12(6): 887-899
- 40 蔡承文, 刘明杰, 黄纯明. 计算平面问题应力强度因子的任意高阶奇应变有限元. *固体力学学报*, 1983, 4(4):597-605
- 41 李英治, 柳春图. Reissner 型平板弯曲断裂分析. *力学学报*, 1983, 15(4):366-375
- 42 柳春图, 李英治. Reissner 型板裂纹尖端应力应变场及应力强度因子计算. *力学学报*, 1984, 16(4):351-362
- 43 Liu C T, Wu X J and Li Y Z. Study on cracked spherical shells. *Scientia Sinica (Series A)*. 1987. 15(9):944-954
- 44 柳春图, 吴晖甲. 含轴向裂纹柱壳裂纹尖端应力应变场及应力强度因子计算. *力学学报*, 1987, 19(2):125-135
- 45 Liu C T and Wu X J. Local stresses and strains in axially cracked cylindrical shells. *Theor Appl Fract Mech*, 1989, 11:51-58
- 46 柳春图, 韩闻生. 含孔边裂纹球壳断裂分析, *应用力学学报*. 1993, 10(1):1-9

- 47 柳春图,胡互让,吴犀甲. 圆柱壳孔边裂纹应力强度因子计算和分析. 计算结构力学及其应用,1992,9(1):7-15
- 48 柳春图,张端重. Reissner 型板中应力强度因子的近似方程和近似解法. 力学学报,1988,20(6):515-521
- 49 Jiang Chiping and Liu Chuntu. Special high-order bending crack tip finite element for the Reissner plate. Chinese J of Aeronautics,1997,10(4):268-274
- 50 Jiang C P and Cheung Y K. A special bending crack tip finite element, Int J Fracture. 1995. 71:55-69
- 51 李英治. 含表面裂纹三维体及含穿透裂纹板裂纹尖端应力应变场及应力强度因子计算:[博士学位论文]. 北京:中国科学院力学研究所,1986
- 52 柳春图,蒋持平,国际断裂力学及断裂失效分析技术的几个新进展. 全国机电设备失效分析. 北京:1992,88-94
- 53 柳春图,蒋持平,当前断裂力学发展的几个问题. 黄克智,徐秉业主编,固体力学发展趋势. 北京:北京理工大学出版社,1995,74-94
- 54 Irwin G R. The crack extension force for a part-through crack in a plate. J Appl Mech,1962,29(4):651-654
- 55 Swedlow J L ed. The surface crack: physical problems and computational solution. New York,1972
- 56 Newman J C Jr and Raju I S. Analyses of surface crack in finite plate under tension or bending loads. NASA TP-1578,1979
- 57 ASTM Annual book of ASTM Standards,1983
- 58 Rice J R. First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front. J Appl Mech,1985,52:571-579
- 59 Bueckner H F. Weight functions and fundamental fields for the penny-shaped and the half-plane crack in three-space. Int J Solids Structures,1987,23:57-93
- 60 Nisitani H. Stress analysis of notch problem. In: Sih G C, ed. Mechanics of fracture 5. Leyden: Noordhoff International Publishing. 1978
- 61 Rice J R and Levy N. The part-through surface crack in an elastic plate. J Appl Mech,1972,39(1):185
- 62 Kumar et al. EPRI NP 3607, Topical report, Research project 1237-1. New York: General Electric Company,1984
- 63 李英治,李敏华,柳春图,何明元. 含表面裂纹三维体裂纹尖端应力应变场及应力强度因子计算. 中国科学,1988
- 64 黎之奇,柳春图,胡振威. 含表面裂纹尖端应力强度因子的三维光弹分析. 实验力学,1991,6(4):347-354
- 65 Liu C T and Li Y Z. Study on cracked plates, shells and three dimensional bodies.

- Engng Fracture Mech, 1987, 28(5/6): 741-761
- 66 Jiang C P and Liu C T. A new Analytical technique for the linear hardening-materials with a surface crack. Computational mechanics, Brookfield; Balkema Publishers, 1991, 963-967
- 67 Liu C T. Analysis of cracked plates and shells, and its application in engineering. in Proc of ICF7, Houston, 1989, 3-22
- 68 Sih G C ed. Mechanics of fracture 3: plates and shells with cracks. Leyden; Noordhoff International publishing, 1977, 302
- 69 黄克智等. 板壳理论. 北京: 清华大学出版社, 1987, 407
- 70 杨耀乾. 平板理论. 北京: 中国铁道出版社, 1980, 356
- 71 张福范. 弹性薄板. 北京: 中国科学出版社, 1984, 262
- 72 徐芝纶. 弹性力学下册. 北京: 人民教育出版社, 1979, 377
- 73 樊大钧. 数学弹性力学. 北京: 新时代出版社, 1983, 480
- 74 Perlman A B and Sih G C. Circular-arc crack in bi-material plates under bending. Int J Fracture Mech, 1967, 3: 193-206
- 75 谢贻权, 何福保. 弹性和塑性力学中的有限单元法. 北京: 机械工业出版社 1981, 231
- 76 Erdogan F. On the stress distribution in plates with collinear cuts under arbitrary loads. Proceedings of the Fourth US National Congress of Applied Mechanics, Washington, 1962, 547-553
- 77 Erdogan F. Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks. J Appl Mech, 1963, 30: 232-236
- 78 蒋持平, 刘习文, 王辉. 一类应力强度因子公式的实用价值. 北京航空航天大学学报, 1996, 22(4): 448-453
- 79 Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J Appl Mech, 1945, 12(2): A69
- 80 Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. J Math Phys. 1944. 23: 184
- 81 胡海昌. 各向同性夹层板反对称小挠度的若干问题. 力学学报, 1963, 6(1)
- 82 王铎. 断裂力学. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1989, 440
- 83 张行. 断裂力学. 北京: 宇航出版社, 1990, 319
- 84 Wang N M. Twisting of an elastic plate containing crack. Int J Fracture Mech. 1970. 6: 367-378
- 85 杨海元, 张敬宇, 赵志岗. 固体力学中的数值方法. 天津: 天津大学出版社, 1992
- 86 Pryor C W et al. Finite element bending analysis of Reissner plates. J Engng Mech Division, Proc. ASCE. 1970. EM6: 305-318
- 87 Rhee H C and Atluri S N. Hybrid stress finite element analysis of bending of a

- plate with a through flaw. *Int J Num Mech Engng.* 1982, 18:259-271
- 88 Dalale F and Erdogan F. The effect of transverse shear in a cracked plate under skew-symmetric loading. *J Appl Mech.* 1979, 46(3):618-624
- 89 Folias E S. A finite line crack in a pressurized spherical shell. *Int J Fracture Mech.* 1965, 1:20-46
- 90 A finite line crack in a pressurized spherical shell. *Int J Fracture Mech.* 1964, 5:327-346
- 91 Folias E S. An axial crack in a pressurized cylindrical shell. *Int J Fracture Mech.* 1965, 1:104-113
- 92 Folias E S. A circumferential crack in a pressurized cylindrical shell. *Int J Fracture Mech.* 1967, 3
- 93 Copley L G and Sander J L. Longitudinal crack in a cylindrical shell under internal pressure. *Int J Fracture Mech.* 1969, 5:117-131
- 94 Duncan M E and Sanders J L. The effect of a circumferential stiffness on the stress in a pressurized cylindrical shell with a longitudinal crack. *Int J Fracture Mech.* 1969, 5:133-155
- 95 Erdogan F and Kibler J. Cylindrical and spherical shells with cracks. *Int J Fracture Mech.* 1969, 5:229-237
- 96 Simmonds J G. Stress intensity factors for arbitrarily oriented cracks in shallow shells. *J Appl Mech.* 1978, 45(1):135-141
- 97 Naghdi P M. On the theory of thin elastic shell. *Quarterly of Appl Math.* 1957, 54:369-380
- 98 Sih G C and Hagendorf H C. A new theory of spherical Shell with cracks. *Thin Shell Structure.* 1974, 365-375
- 99 Dalale F and Erdogan F. Effect of transverse shear and material orthotropy in a cracked spherical cap. *Int J Solids Structures.* 1979, 15:907-926
- 100 Dalale F. Cracked shell under skew-symmetric loading. *Int J Eng Science.* 1982, 20:1325-1347
- 101 Liu C T and Li Y Z. The stress-strain fields at crack tip in cracked spherical shell. In: Valluri et al eds, *Advances in Fracture Research*, New, Delhi, 1984, 2:945-954
- 102 朱伯芳. 有限单元法原理与应用. 北京:水利电力出版社, 1979
- 103 吴犀甲. 含裂纹球壳的断裂分析:[硕士学位论文]. 北京:中国科学院力学研究所, 1987
- 104 Krohk S. Influence of transverse shear on an axial crack in a cylindrical shell. *Int J Fracture.* 1978, 14:123-143



- 105 Barsoum R S and Loomis R W. Analysis of through crack in cylindrical shells by the quarter point elements. *Int J Fracture*, 1979, 15: 259
- 106 Wu X J and Liu C T. The stress-strain fields at crack tip in a circumferentially cracked cylindrical shell and calculation of stress intensity factors. *proc. 6th Int Conf on Pressure Vessel Technology*, Vol. I, 1988
- 107 Matthech C, Morawietz P and Munz D. Calculation of the stress intensity factor of a circumferential crack in a tube originating from a hole under axial tensile and bending loads. *Engng Fracture Mech*, 1985, 22: 645
- 108 石钟慈. 样条有限元. *计算数学*, 1979, 1: 50-72
- 109 蒋持平. 考虑剪切变形矩形板的有限条分析. *上海力学*, 1982, 3: 48-58
- 110 蒋持平. 用样条有限点法分析中厚矩形板的自由振动和稳定问题. *振动与冲击*, 1983, 3: 74-78
- 111 Ruiz C and Epstein J. On the variation of the stress intensity factor along the front of a surface flaw. *Oxford Univ, Dept. of Engineering Science, Oxford OX 1 3PJ*
- 112 Smith F W and Sorensen D. Mixed mode stress intensity factors for semielliptical surface crack. *NASA CR-134684*
- 113 Smith C W. Use of three-dimensional photoelasticity in fracture mechanics. *Exp Mech*, 1973, 539-544
- 114 Phang Y and Ruiz C. Photoelastic determination of stress intensity factors for single and interacting cracks results, part II; three-dimensional problems. *J Strain Analysis*, 1984, 19(1): 35-41
- 115 Irwin G R. Discussion, *Proc Soc Exp Stress Analysis*. 1958, 16: 93-96
- 116 Post D. Fringe multiplications in three-dimensional photoelasticity. *J Strain Analysis*. 1966, 1(5): 380-388

## 内 容 简 介

本书是国内外首次系统阐述板壳弯曲断裂理论及其实用分析方法的专著。书中阐明了板壳断裂理论的基础,论证了 Reissner 型板壳断裂理论的科学性、经典板壳断裂理论的缺陷及在一定范围内仍具有的实用价值;介绍了作者所创意的研究 Reissner 型板壳裂纹尖端场的方法,以及对各类 Reissner 型板壳裂纹尖端应力应变场的系统研究成果;在对裂纹尖端场严格的理论分析的基础上,建立了分析含裂纹板壳的既严格又实用有效的局部-整体法;对经典板壳的断裂分析还发展了有特色和简便有效的复变-主部法;提供了一批为实际工程所需要的算例。本书最后一章介绍了作者对表面裂纹尖端场的开拓性研究,以及在此基础上所建立的对含表面裂纹板壳三维分析的局部-整体法。

读者对象:航空、航天、船舶、机械、建筑、压力容器等工业部门及从事固体力学研究的工程技术人员与科研人员,高等院校相关专业的教师、研究生与高年级本科生。

Fracture Mechanics for plates and shells

The synopsis of the book

This book makes a systematic exposition of the fracture theory and analytical method for plates and shells with cracks. It includes the theoretical basis of plate and shell bending fracture and the Reissner plate

and shell fracture theory, the pragmatic value in some application areas and weakness of the Kirchhoff classical plate and shell fracture theory, the systematic theoretical work developed by the first author in researching the crack tip fields of the Reissner plates and shells, the accurate and efficient local-global method in fracture analysis of Reissner plates and shells developed based on the above-mentioned theoretical researches, the complex variable-principal method in fracture analysis of the Kirchhoff plates and shells, and a series of computational examples which are useful in engineering applications. In the last chapter a pioneering work for researching surface crack tip fields is presented, and the local-global method in 3-dimensional analysis of plates and shells with surface cracks is developed.

The Readers; engineers and researchers in the industrial departments of aeronautics astronautics, shipping, machinery, pressure vessel etc; the teaching staff, graduate students and senior undergraduate students in relevant specialities in universities and colleges.